

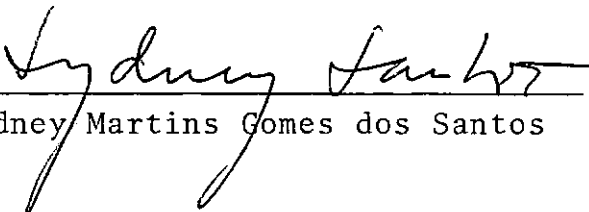
VIGAS CONTÍNUAS EM HASTES DE PAREDES

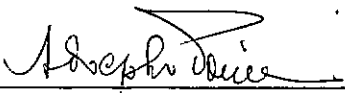
DELGADAS - ESTUDO DA TORÇÃO

Ingrid Ilg

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovado por:


Sydney Martins Gomes dos Santos


Adolpho Polillo


Fernando Luiz Lobo Barbosa Carneiro

RIO DE JANEIRO, RJ. - BRASIL

OUTUBRO DE 1983

ILG, INGRID

Vigas Contínuas em Hastes de Paredes Delgadas - Estudo da Torção (Rio de Janeiro), 1983.

XV , 224 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1983)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Linhas de Influência para Bimomentos em vigas contínuas:

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

Meus sinceros agradecimentos à:

Adolpho Polillo, professor, chefe e amigo, cujo incentivo me levou a lecionar na UFRJ e posteriormente ao curso de mestrado.

Sidney Santos, professor, orientador e incentivador.

Lobo Carneiro, professor e consultor.

Kollbrunner e Hajdin, pela atenção dispensada.

RESUMO

Trata-se de um trabalho dividido em VI Capítulos que estuda a torção em hastes de paredes delgadas.

No Capítulo I foram conceituados os elementos necessários ao desenvolvimento do trabalho: Bimomento e Torção de Empenamento, Propriedades Setoriais de uma Seção.

No Capítulo II foi feito o estudo analítico do Bimomento: o empenamento da Seção, tensões normais e tangenciais, a equação diferencial do Bimomento.

O Capítulo III apresenta a resolução de vigas contínuas em hastes de paredes delgadas, através dos métodos usuais da Hiperestática: método das forças e método dos deslocamentos.

O Capítulo IV estuda o traçado das Linhas de Influência em vigas contínuas sujeitas a carga de momento torçor sendo os hiperestáticos, os Bimomentos.

No Capítulo V há um exemplo de determinação numérica das tensões em hastes de paredes delgadas.

O Capítulo VI relaciona as conclusões do estudo.

Em todos os Capítulos foram desenvolvidos vários exemplos esclarecedores da matéria exposta.

ABSTRACT

This is a thesis, divided in six Chapters, that studies torsion in thin walled beams.

In Chapter I, the necessary concepts to the development of the thesis are exposed: Bimoment and warping torsion, sectorial properties of a section.

In Chapter II, an analytical study of bimoment is presented: the warping of a section, normal and shear stresses, the bimoment differential equation.

Chapter III shows the resolution of a thin walled continuous beam through the usual hyperstatics methods: force method and displacement method.

Chapter IV studies the construction of bimoment influence lines of continuous beams subjected to torsional moment.

In Chapter V there is an example of numerical determination of tensions in thin walled beams.

Chapter VI relates the conclusions found in this study.

In all Chapters, various examples were developed in order to clarify the exposed subjects.

INDICE

	Pág.
CAPÍTULO I - CONCEITOS INICIAIS	1
I.1 - Definição de uma Haste de Paredes Delgadas . . .	1
I.2 - O Conceito de Bimomento e de Torção de Empenamento	3
I.3 - Propriedades Setoriais de uma Seção - Definições	7
I.4 - Propriedades Setoriais de uma Seção - Determinação	13
CAPÍTULO II - ESTUDO ANALÍTICO DO BIMOMENTO	25
II.1 - Hipóteses Simplificadoras	25
II.2 - O Empenamento da Seção	27
II.3 - Tensões Normais	31
II.4 - Tensões Tangenciais	39
II.5 - Relação entre o Ângulo de Rotação da Haste e o Carregamento Externo	45

II.6 - A Equação do Bimomento	46
II.7 - Exemplo Resolvido	56
CAPÍTULO III - RESOLUÇÃO DE VIGAS CONTÍNUAS EM HASTES	
DE PAREDES DELGADAS	62
III.1 - Introdução	62
III.2 - Método das Forças	64
III.3 - Exemplo Resolvido	73
III.4 - Método dos Deslocamentos	93
III.5 - Exemplo Resolvido	108
CAPÍTULO IV - LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA BIMOMENTO . . .	
IV.1 - Linhas de Influência dos Hiperestáticos	112
IV.2 - Exemplos Numéricos	138
IV.3 - Linhas de Influência das Seções	
Intermediárias	183
IV.4 - Exemplo Numérico	184
IV.5 - Observações Finais	187

CAPÍTULO V - DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES	192
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	203
APÊNDICE	205
BIBLIOGRAFIA	223

NOTAÇÕES

A = área da seção transversal $| L^2 |$

B = bimomento concentrado $| FL^2 |$

C = coeficiente de transmissão $| L^0 |$

ch = cosseno hiperbólico

E = módulo de elasticidade ou de deformação longitudinal
 $| FL^{-2} |$ $E_1 = \frac{1}{1 - \nu^2}$

G = módulo de deformação transversal $| FL^{-2} |$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

I_t = momento de inércia à torção $| L^4 |$

I_z = momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z $| L^4 |$

I_y = momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo y $| L^4 |$

I_ω = momento de inércia setorial $| L^6 |$

$I_{\omega y}$ = produto de inércia setorial em relação ao eixo y $| L^5 |$

$I_{\omega z}$ = produto de inércia setorial em relação ao eixo z $| L^5 |$

$$k = \sqrt{\frac{G I_t}{E I_w}} - \text{comprimento característico} \quad | L^{-1} |$$

$$\ell = \text{vão da haste} \quad | L |$$

$$m_B = \text{bimomento distribuído} \quad | F L |$$

$$m_t = \text{momento torçor total por unidade de comprimento} \quad | F |$$

$$m_v = \text{momento torçor de Saint Venant por unidade de comprimento} \quad | F |$$

$$m_y = \text{momento fletor distribuído} \quad | F |$$

$$m_z = \text{momento fletor distribuído} \quad | F |$$

$$m_\omega = \text{momento torçor de empenamento por unidade de comprimento} \quad | F |$$

$$M_y = \text{momento fletor cujo vetor representativo é paralelo ao eixo } y \quad | F L |$$

$$M_z = \text{momento fletor cujo vetor representativo é paralelo ao eixo } z \quad | F L |$$

$$N = \text{esforço normal} \quad | F |$$

$$p_z = \text{carga distribuída paralela ao eixo } z \quad | F L^{-1} |$$

$$p_y = \text{carga distribuída paralelo ao eixo } y \quad | F L^{-1} |$$

P_x = carga concentrada paralela ao eixo x | F |

P_y = carga concentrada paralela ao eixo y | F |

P_z = carga concentrada paralela ao eixo z | F |

s = coordenada curvilínea | L |

S_h = seno hiperbólico

S_w = momento estático setorial | L^4 |

S_y = momento estático da seção transversal em relação ao eixo y | L^3 |

S_z = momento estático da seção transversal em relação ao eixo z | L^3 |

t = espessura da seção | L |

t_h = tangente hiperbólica

T = momento torçor total | FL |

T_v = momento torçor de Saint Venant | FL |

T_w = momento torçor de empenamento | FL |

u = empenamento | L |

V_y = esforço cortante paralelo ao eixo y | F |

V_z = esforço cortante paralelo ao eixo z $| F |$

W = trabalho $| F L |$

δ	deformação, deslocamento	$ L $
ε	alongamento unitário	$ L^0 $
ψ	rotação da haste	$ L^0 $
ψ'	rotação específica	$ L^{-1} $
γ	distorção	$ L^0 $
λ	coeficiente de distribuição	$ L^0 $
ν	coeficiente de Poisson	$ L^0 $
ω	coordenada setorial	$ L^2 $
τ	tensão tangencial	$ FL^{-2} $
σ_B	tensão normal devida ao bimomento	$ FL^{-2} $
χ	rigidez ao empenamento	$ FL^2 $

APRESENTAÇÃO E JUSTIFICATIVA

A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO

Há uma grande tendência em se adotar hastes de paredes delgadas para se obter a relação peso/resistência ideal em termos econômicos.

Sob as mesmas condições de carregamento, hastes de paredes delgadas comportam-se de maneira muito diferente das hastes de paredes espessas. Uma haste de paredes delgadas sujeita a torção tende a empenar. Geralmente adotam-se apoios, ligações e enrijecedores para restringir o empenamento, resultando daí deslocamentos e tensões longitudinais, que por sua vez não têm efeito somente local, isto é, transferem-se a vãos adjacentes mesmo descarregados.

Com o desenvolvimento ocorrido nos perfis estruturais, com a diminuição dos coeficientes de segurança, consequência do aprofundamento dos conhecimentos do comportamento estrutural e das propriedades dos materiais, a importância da torção nos projetos estruturais vem crescendo substancialmente nos últimos anos, pois as tensões e deformações produzidas pela torção são geralmente decisivas no dimensionamento.

O OBJETIVO DO ESTUDO

Procuramos dar um caráter prático ao estudo, is

to é, além do desenvolvimento teórico puramente acadêmico, indicamos métodos práticos de cálculo para atender aos objetivos dos engenheiros projetistas; talvez por este motivo tenhamos sido às vezes um pouco minuciosos.

CAPÍTULO I

CONCEITOS INICIAIS

I.1 - DEFINIÇÃO DE UMA HASTE DE PAREDES DELGADAS

. De acordo com Zbirohowski-Kôscia:

Qualquer haste cujo momento de inércia principal setorial seja diferente de zero⁽¹⁾.

. De acordo com Vlassov:

Hastes que apresentam

$$\frac{t}{d} \leq \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad \frac{d}{L} \leq \frac{1}{10}$$

sendo

$t \rightarrow$ espessura da parede

$d \rightarrow$ dimensão característica da seção
(altura ou largura)

$L \rightarrow$ comprimento da peça

(¹) Definição de momento de inércia principal setorial (veja pág. 9).

.. De acordo com Kollbrunner:

Hastes com eixo reto ou curvo cuja seção transversal contêm elementos de espessura pequena em relação às suas dimensões características (altura e largura)

. De acordo com sugestão de Zbirohowski-Kôscia:

Quando $k > 1,0 \text{ pol}^{-1} = 2,54 \text{ cm}^{-1}$, a haste pode ser considerada de paredes espessas.

Quando $k < 0,5 \text{ pol}^{-1} = 1,27 \text{ cm}^{-1}$, a haste terá de ser considerada de paredes delgadas.

Quando $1,0 > k > 0,5$ ou $2,54 \text{ cm}^{-1} > k > 1,27 \text{ cm}^{-1}$, a haste poderá ser de parede espessa ou delgada.

sendo

$$k = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E_1 \cdot I_\omega}}$$

o "comprimento característico" da haste.

. De acordo com T. H. G. Megson:

$$\frac{t_{\max}}{b} \leq 0,1$$

sendo:

t_{\max} espessura máxima da seção.

Os valores de b estão indicados nas figuras abaixo:

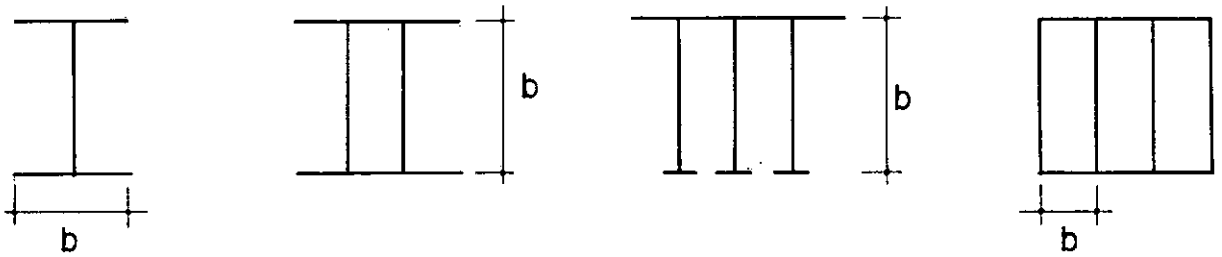


FIG I.1

I.2 - O CONCEITO DE BIMOMENTO E DA TORÇÃO DE EMPENAMENTO

Examinemos um perfil I sujeito aos carregamentos indicados nas figuras:

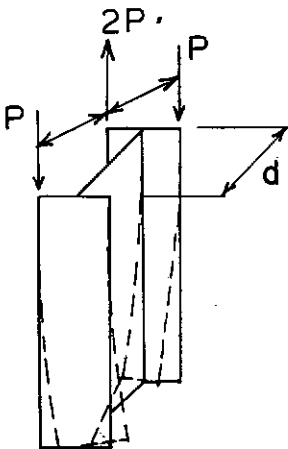


FIG I.2

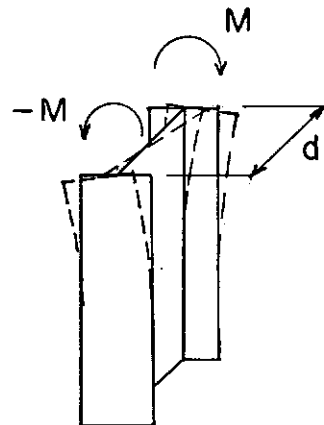


FIG I.3

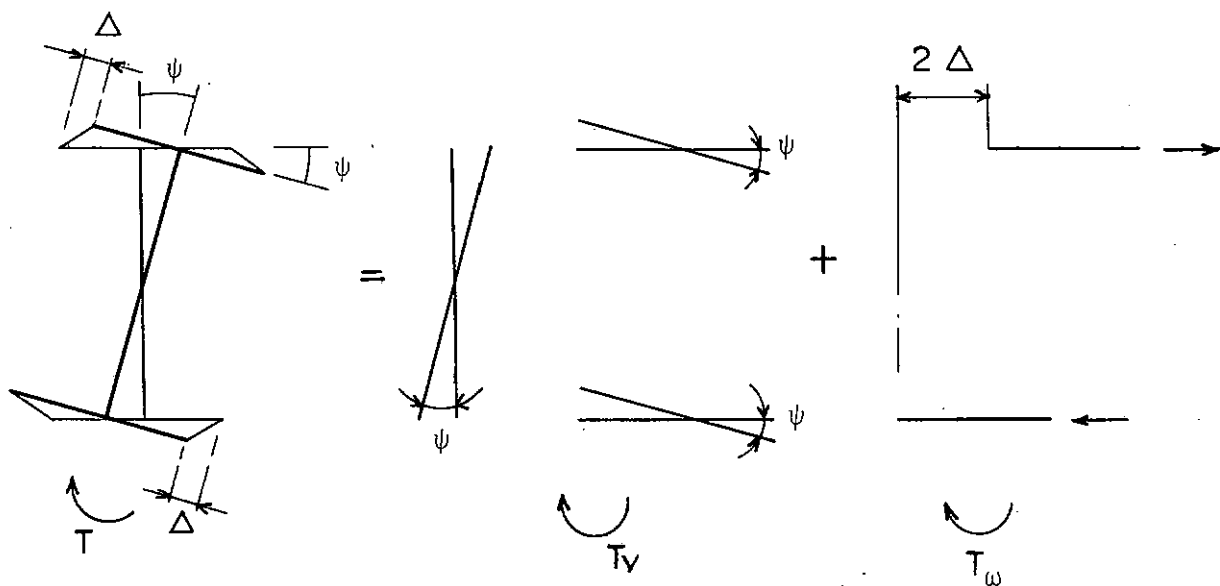


FIG 1.5

A seção I submetida à ação do momento torçor T ficará distorcida. Esta distorção é a soma de dois efeitos:

1º Efeito: Tanto as mesas quanto a alma sofreram uma rotação ψ em relação a seus centros de gravidade. É a deformação causada pela torção de Saint Venant T_V ;

2º Efeito: Cada mesa sofreu um deslocamento Δ . É a deformação causada por uma torção associada a uma "flexão", que Vlasov denominou torção de empenamento T_ω .

A torção total T sofrida pela seção seria então a soma dessas torções parciais T_V e T_ω .

Esta torção de empenamento provoca o efeito equi

valente ao da ação de um par de momentos de flexão iguais mas de sentidos opostos atuando em dois planos paralelos. É o chamado Bimomento B . Seu valor numérico é dado pelo produto da distância entre esses dois planos pelo momento em um dos planos. Sua dimensão é pois $[FL^2]$.

Sua representação física seria a da figura:

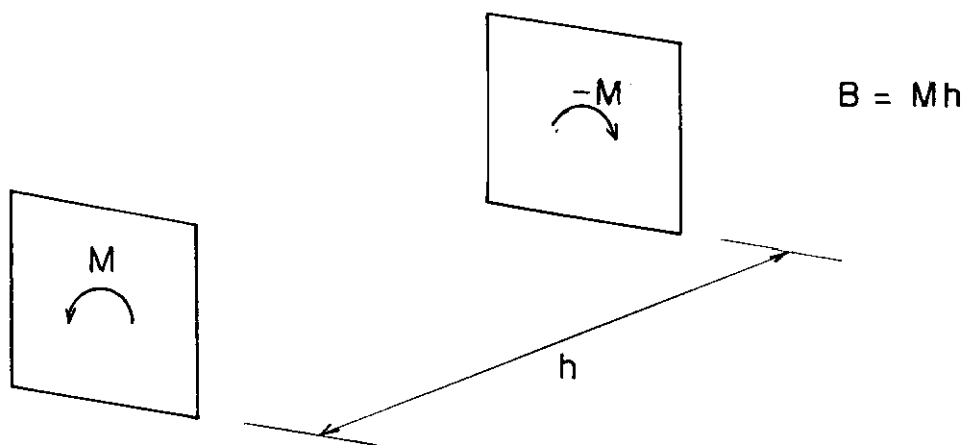


FIG I.6

No Capítulo II desenvolveremos matematicamente esses conceitos.

Convém salientar que os efeitos de bimomento, torção de empenamento e da torção de Saint Venant podem estar presentes numa haste de paredes delgadas mesmo quando não houver a solicitação externa de um momento torçor (como nos exemplos das Figuras I.2 e I.3).

I.3 - PROPRIEDADES SETORIAIS DE UMA SEÇÃO - DEFINIÇÕES

I.3.1 - Coordenada Setorial ω

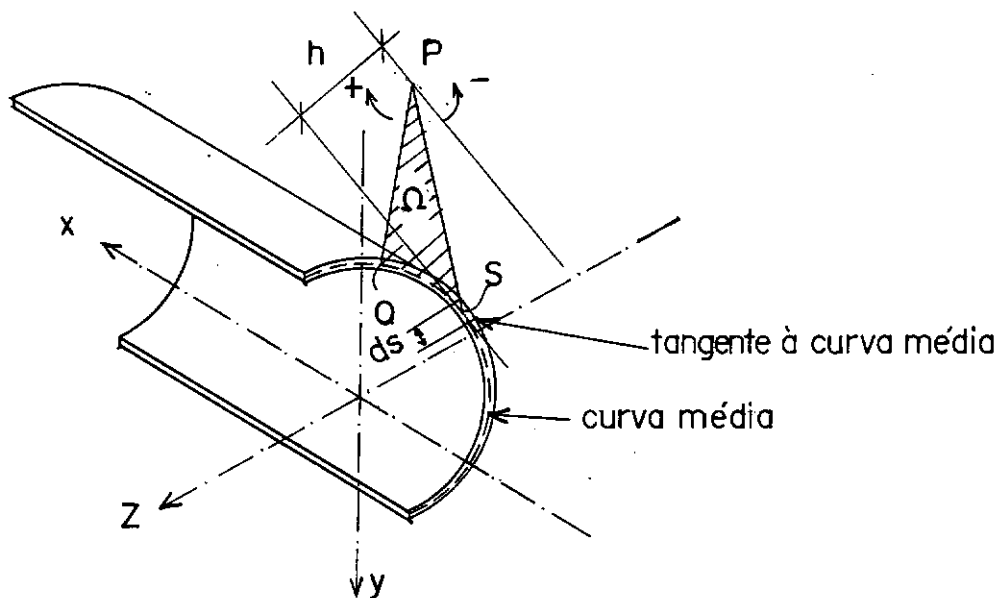


FIG I.7

A coordenada setorial do ponto S medida a partir do polo P e com raio inicial PO será:

$$\omega_{\text{pos}} = \int_0^S h(s) ds$$

sendo:

$h \dots$ a distância entre o polo P e a tangente à curva média no ponto S

$ds \dots$ elemento da curva média

Observemos que:

a) POS abrange uma área de valor Ω e a coordenada setorial ω

é numericamente igual ao dobro desta área

b) ω tem pois a dimensão de uma área

$$[\omega] = L^2$$

Sinal de ω :

quando o ângulo OPS é medido a partir de PO no sentido horário, ω será positivo.

Seja a seção transversal de uma haste de paredes delgadas;

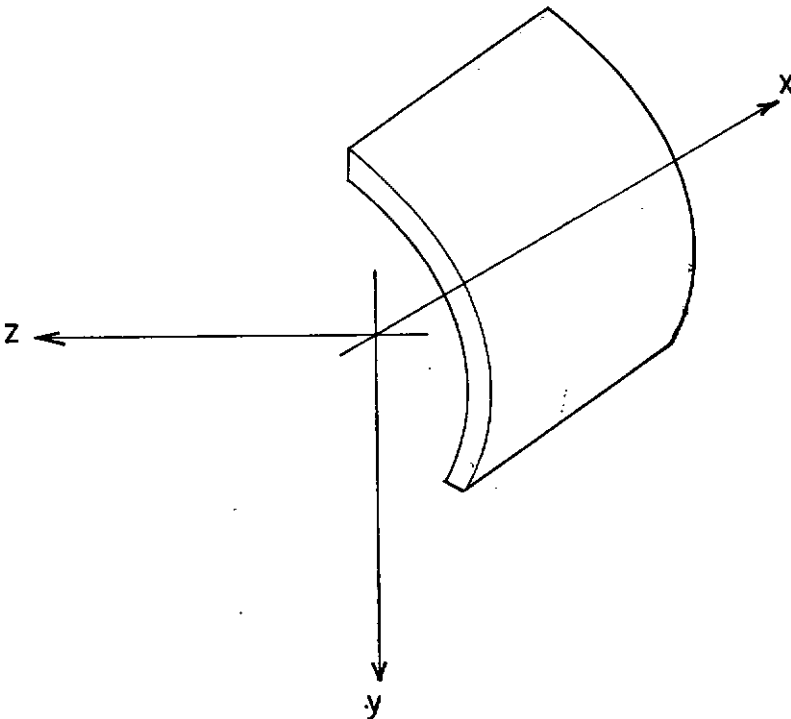


FIG I.8

I.3.2 - Momento Estático Setorial S_{ω}

A partir de um polo P e de um raio inicial PO é definido pela expressão:

$$S_{\omega_{PO}} = \int_A \omega \, dA$$

sendo A a área da seção transversal,

I.3.3 - Produtos de Inércia Setoriais $I_{\omega z}$ e $I_{\omega y}$

I.3.3.1 - Em Relação ao Eixo z

$$I_{\omega z_{PO}} = \int_A y \, \omega \, dA$$

I.3.3.2 - Em Relação ao Eixo y

$$I_{\omega y_{PO}} = \int_A z \, \omega \, dA$$

I.3.4 - Momento de Inércia Setorial I_{ω}

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 \, dA$$

I.3.5 - Coordenadas Básicas

Coordenadas básicas de uma seção transversal são aquelas para:

eixos quaisquer,
 polo P qualquer e
 raio inicial qualquer.

Neste caso teremos, além das grandezas S_{ω} , $I_{\omega z}$, $I_{\omega y}$, I_{ω} , aquelas já conhecidas da geometria das massas que são:

S_y e S_z (momentos estáticos em relação aos eixos y e z respectivamente);

I_y e I_z (momentos de inércia em relação aos eixos y e z respectivamente);

I_{yz} (produto de inércia em relação aos eixos y e z).

perfazendo um total de 9(nove) grandezas que caracterizam a seção.

I.3.6 - Coordenadas Normalizadas de Uma Seção Transversal

São obtidas quando os eixos y e z são eixos baricêntricos, o polo P é qualquer e o raio PO é tal que $S_{\omega} = 0$.

Neste caso teremos 6 grandezas a caracterizar a seção, que são:

$$I_{\omega y}, \quad I_{\omega z}, \quad I_{yz}$$

$$I_{\omega}, \quad I_y, \quad I_z$$

pois as outras serão iguais a zero.

$$S_{\omega} = S_y = S_z = 0$$

I.3.7 - Coordenadas Principais de Uma Seção Transversal

São obtidas quando os eixos y e z são eixos baricêntricos principais de inércia, o polo P é o centro de cisalhamento e o raio PO é tal que $S_{\omega} = 0$.

Neste caso teremos 3 grandezas a caracterizar a seção, que são:

$$I_w, \quad I_y, \quad I_z$$

pois serão nulas as outras grandezas:

$$S_w = S_y = S_z = I_{wy} = I_{wz} = I_{yz} = 0$$

I.3.8 - Centro de Cisalhamento

Para determinarmos o centro de gravidade da seção, anulamos os momentos estáticos, isto é:

$$S_y = 0$$

$$S_z = 0$$

Para determinarmos a direção dos eixos principais de inércia anulamos o produto de inércia, isto é:

$$I_{yz} = 0$$

De maneira análoga, para determinarmos o centro de cisalhamento, anulamos os produtos de inércia setoriais, ou seja:

$$I_{\omega y} = 0$$

$$I_{\omega z} = 0$$

o raio inicial principal será determinado anulando-se o momento estático setorial, isto é:


$$S_{\omega} = 0$$

As coordenadas do centro de cisalhamento serão:

$$z_0 = - \frac{I_{\omega z}}{I_z} \qquad y_0 = \frac{I_{\omega y}}{I_y}$$

O centro de cisalhamento será o ponto em torno do qual girará a seção quando sujeita a um momento torçor.

I.4 - DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES SETORIAIS DE UM PERFIL

 6" x 2" x 23,1 kgf/m

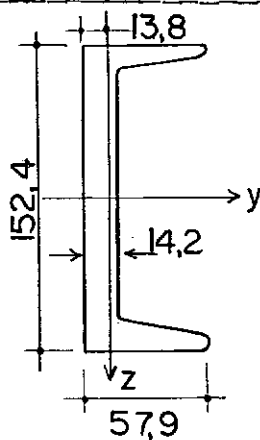


FIG I.9

Dados fornecidos pela tabela da Companhia Side-
rúrgica Nacional:

$$\text{Área} = 29,4 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 815 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 52,4 \text{ cm}^4$$

Largura das mesas t_f

$$152,4 \times 14,2 = 2164 \text{ mm}^2$$

$$(57,9 - 14,2) t_f \times 2 = 2940 - 2164 = 776 \therefore t_f = 8,9 \text{ mm}$$

Perfil Simplificado

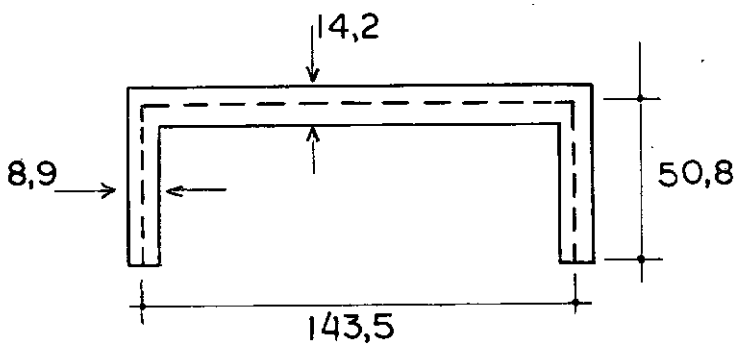


FIG I.10

I.4.1 - Obtenção do Diagrama dos ω_G : (auxiliar)

Para polo tomaremos o centro de gravidade e o raio inicial será \overline{PI} .

Calculando as coordenadas setoriais nos pontos 1, 2, 3, 4 e 5 da seção obtemos:

$$\omega_2 = 2 \frac{143,5}{2} \times \left(\frac{13,8 - 7,1}{2} \right) = 480,7 \text{ mm}^2 = -\omega_4$$

$$\omega_3 = \omega_2 + 50,8 \times \frac{143,5}{2} = 480,7 + 3644,9 = 4125,6 \text{ mm}^2 = -\omega_5$$

$$\omega_1 = 0$$

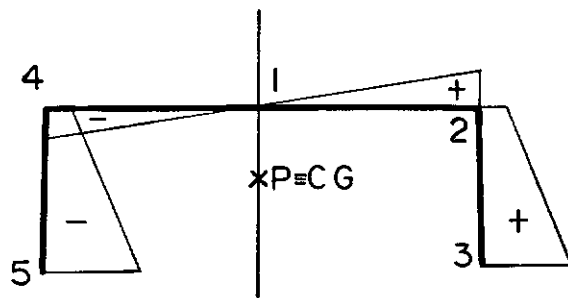


FIG I.II

I.4.2 - Coordenadas do Centro de Cisalhamento

Conforme já sabemos as expressões das coordena-

das são as seguintes:

$$z_o = - \frac{I_{\omega GZ}}{I_z} \quad \text{e} \quad y_o = \frac{I_{\omega Gy}}{I_y}$$

sendo

$$I_{\omega GZ} = \int_S y \, \omega_G \, ds$$

e

$$I_{\omega Gy} = \int_S z \, \omega_G \, ds$$

Obtenção das Integrais.

Diagrama dos y :

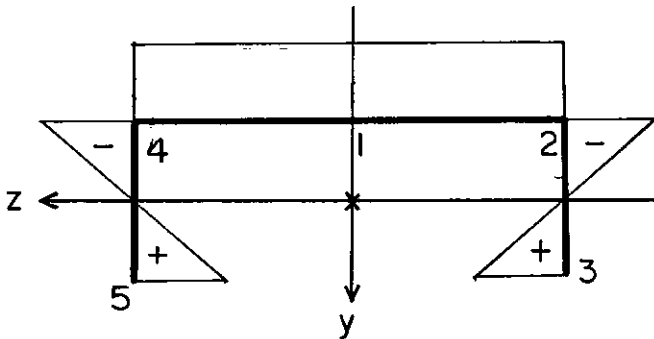


FIG I.12

$$Y_1 = Y_2 = Y_4 = - (13,8 - 7,1) = -6,7 \text{ mm}$$

$$Y_3 = Y_5 = + (50,8 - 6,7) = + 44,1 \text{ mm}$$

Diagrama dos Z:

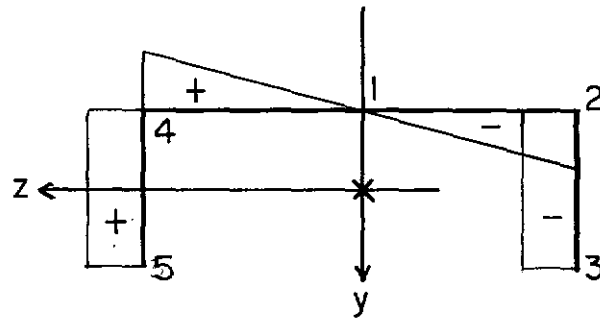


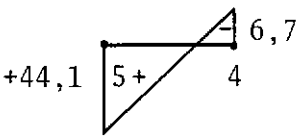
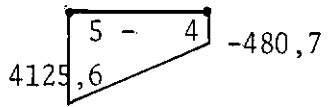
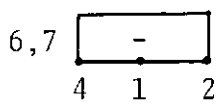
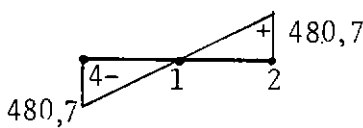
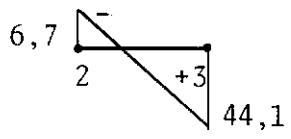
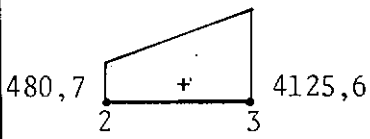
FIG I.13

$$Z_1 = 0$$

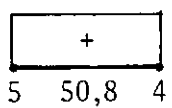
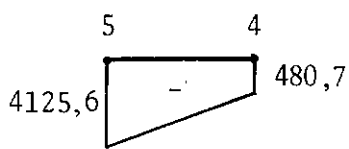
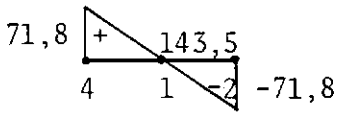
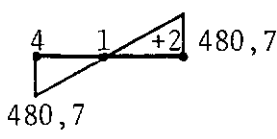
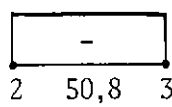
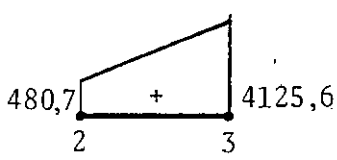
$$Z_5 = Z_4 = + \frac{143,5}{2} = + 71,75 \cong 72 \text{ mm} = -Z_2 = -Z_3$$

Cálculo de $\int_S y \omega_G ds$

Conforme podemos observar o valor desta integral será nulo resultando daí $Z_0 = 0$ o que já era previsível, visto ser y eixo de simetria.

y	ω_G	t	$\int_S y \omega_G ds$
		8,9	$-\Delta$
		14,2	0
		8,9	$+\Delta$

Cálculo de $\int_S z \omega_G ds$:

z	ω_G	t	$\int_S z \omega_G ds$
		8,9	$-8,9 \times \frac{1}{2} \times 50,8 \times 71,8 (4125,6 + 480,7)$ $= -747,65 \text{ cm}^5$
		14,2	$-14,2 \times \frac{1}{3} \times 71,8 \times 480,7 \times 143,5 =$ $= 234,4 \text{ cm}^5$
		8,9	$-747,7 \text{ cm}^5$
			$-1729,8 \text{ cm}^5$

Achamos para o valor da integral $-1729,8 \text{ cm}^5$ resultando daí

$$y_o = \frac{-1729,8 \text{ cm}^5}{815 \text{ cm}^4} = -2,12 \text{ cm}$$

I.4.3 - Diagrama dos ω :

Neste caso o polo é o centro de cisalhamento.

Distância entre o polo e o ponto inicial 1 (raio inicial P1)

$$21,2 - 13,8 + 7,1 = 14,5 \text{ mm}$$

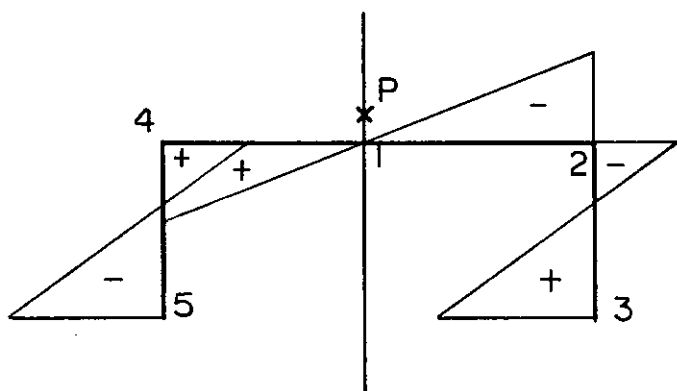


FIG I.14

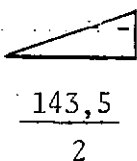
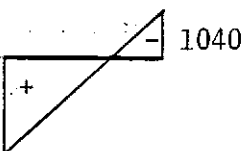
Calculando as coordenadas setoriais nos pontos 1, 2, 3, 4 e 5 achamos:

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = -\frac{143,5}{2} \cdot 14,5 = -1040,4 \text{ mm}^2 = -\omega_4$$

$$\omega_3 = \omega_2 + 50,8 \times \frac{143,5}{2} = -1040,4 + 3644,9 = +2604,5 \text{ mm}^2 = -\omega_5$$

$$\text{Cálculo de } I_{\omega} = \int_S \omega^2 t \, ds$$

ω	t	I_{ω}
(2x) 	14,2	$= 2 \times \frac{1}{3} \times 1040 \times 1040 \times \frac{143,5}{2} \times 14,2 = 734,7 \text{ cm}^6$
(2x) 	8,9	$= 2 \times \frac{1}{3} \left 1040^2 + 2604^2 - 1040 \times 2604 \right 50,8 \times 8,9 = 15536 \text{ cm}^6$
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: auto;"> $I_{\omega} = 2288,2 \text{ cm}^6$ </div>		

NOTA: Na Bibliografia [10] estão indicados os valores dessas propriedades geométricas para os perfis correntes.

$$\text{I.4.4 - } \underline{\text{Determinação de } S_{\omega}} = \int_A \omega \, dA$$

Vide Figura I.15.

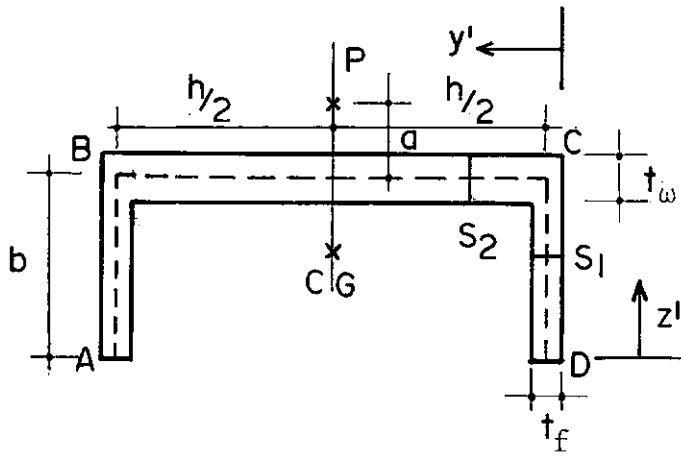


FIG I.15

Na seção em estudo temos:

$$a = 14,5 \text{ mm}$$

$$b = 50,8 \text{ mm}$$

$$h = 143,5 \text{ mm}$$

$$t_f = 8,9 \text{ mm}$$

$$t_w = 14,2 \text{ mm}$$

A expressão da coordenada setorial para a seção

S_1 será:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -a \frac{h}{2} + (b - z') \frac{h}{2} = \frac{h}{2} (b - a - z') = \\ &= \frac{143,5}{2} (50,8 - 14,5 - z') = 2604,5 -\end{aligned}$$

O elemento de área será:

$$dA = t_f dz' = 8,9 dz'$$

a expressão do momento estático setorial para a seção S_1

$$\begin{aligned}S_{\omega_1} &= \int_A \omega dA = \int_0^b (2604,5 - 71,75 z') 8,9 dz' = \int_0^b 23180 dz' - \int_0^b 638,6 \\ &= 23180 \times z' - 638,6 \frac{z'^2}{2}\end{aligned}$$

Nas seções A e D teremos $z' = 0$, como sequência

$$S_{\omega A} = S_{\omega D} = 0$$

Nas seções B e C teremos $z' = b = 50,8$

$$S_{\omega B} = S_{\omega C} = 23180 \times 50,8 - 319,3 \times 50,8^2 = 353545,6 \text{ mm}^4$$

$$= 35,4 \text{ cm}^4$$

A expressão da coordenada setorial para a seção S_2 será:

$$\omega_2 = - \left(\frac{h}{2} - y' \right) a = - 14,5 \left(\frac{143,5}{2} - y' \right) = -1040,4 + 14,5 y'$$

Sendo o elemento de área

$$dA = t_{\omega} dy' = 14,2 dy'$$

A expressão do momento estático setorial para a seção S_2 será:

$$\begin{aligned} S_{\omega_2} &= S_{\omega G} + \int_A \omega dA = 353545,6 + \int_0^{h/2} (14,5 y' - 1040,4) 14,2 dy' = \\ &= \int_0^{h/2} 205,9 y' dy' - \int_0^{h/2} 14773,7 dy' = 353545,6 + 205,9 \frac{y^2}{2} - 14773,7 y' \end{aligned}$$

Obtenção dos pontos máximos da curva S_{ω} :

Derivando S_{ω_1} e igualando a zero vem:

$$23180 - 638,6 z' = 0 \quad \therefore \quad z' = 36,30 \text{ mm}$$

$$S_{\omega A'} = 23180 \times 36,3 - \frac{638,6}{2} \times 36,3^2 = 420695 \text{ mm}^4 = 42,1 \text{ cm}^4$$

$$S_{\omega B'} = 353545,6 + 103 (71,75)^2 - 14773,7 \times 71,75 = -176217 \text{ mm}^4$$

$$= -17,6 \text{ cm}^4$$

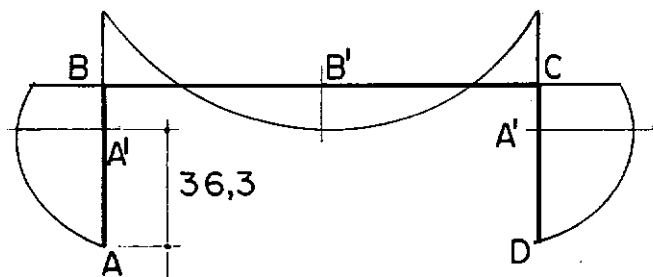


FIG I.16

CAPÍTULO II

ESTUDO ANALÍTICO DO BIMOMENTO

II.1 - HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

A teoria de Vlasov baseia-se em três hipóteses simplificadoras:

1.^a Hipótese:

A forma do perfil da seção transversal permanece inalterada sob a ação do carregamento externo. Isto é, o perfil pode sofrer uma rotação ou uma translação em relação a posição inicial sob a ação de um carregamento externo, porém a posição relativa de seus pontos permanecerá inalterada no plano yz (mas não ao longo do eixo longitudinal x) (Veja Figura II.3).

Esta hipótese justifica-se desde que as deformações não sejam exageradas, isto é, desde que a seção transversal seja suficientemente rígida para absorver tensões transversais sem apresentar deformações substanciais. Nem sempre é este o caso das hastes de paredes delgadas; deverão então ser estudadas por outro método em que seja levada em consideração a deformação da seção transversal. Os perfis laminados em geral apresentam uma grande rigidez transversal, satisfazendo portanto esta hipótese.

2ª Hipótese:

A distorção na superfície média da haste é desprezível.

Trata-se de uma generalização da hipótese de Bernouilli (as seções se mantêm planas após as deformações) sobre a qual está desenvolvida a teoria clássica de flexão de vigas (a deformabilidade por cortante é desprezada).

Isto significa dizer que as tensões de cisalhamento oriundas da torção de Saint Venant distribuem-se anti-simetricamente em relação à linha média da haste.

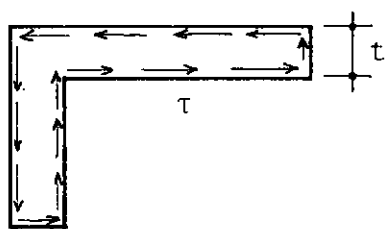


Figura II.1

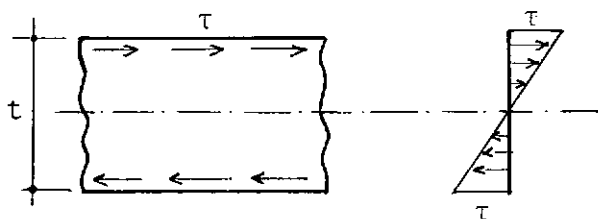


Figura II.2

Conforme se sabe da Resistência dos Materiais,

$$\tau = G \gamma$$

na linha média, como $\gamma = 0$, $\tau = 0$.

3ª Hipótese:

Um elemento linear perpendicular à superfície média da haste, após a deformação da mesma, permanece reto e perpendicular à superfície média deformada, não apresentando alteração de comprimento.

Esta é a hipótese de Kirchhoff usual na Teoria de Placas, e é justificada pelo fato de as espessuras das hastes de paredes delgadas serem pequenas, tanto em relação às dimensões da seção transversal, quanto ao comprimento da haste.

II.2 - O EMPENAMENTO DA SEÇÃO

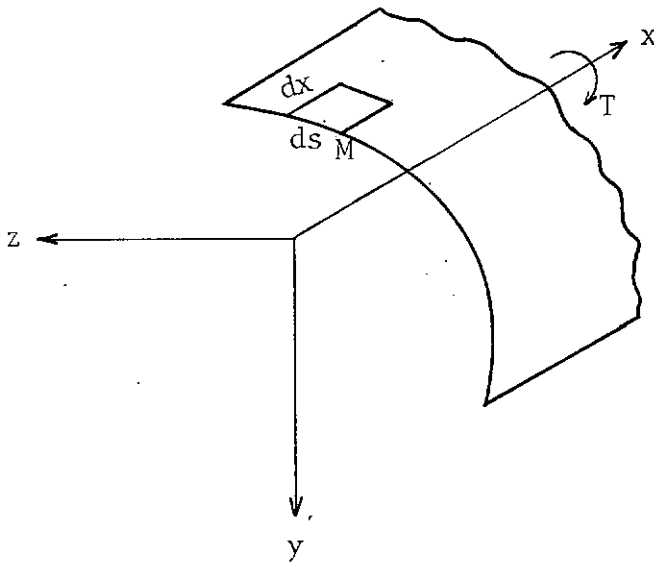


Figura II.3

Eixos considerados:

y e z eixos baricêntricos principais de inércia

x eixo longitudinal da haste

Estudemos o elemento dx ds após a seção transversal sofrer um empenamento provocado por um momento torçor T

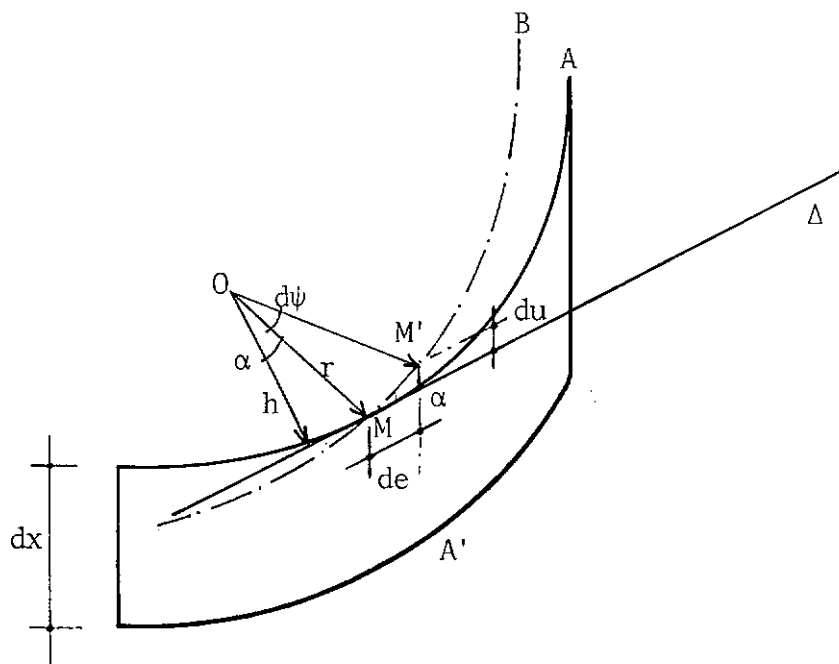


Figura II.4

Sejam:

Δ ... tangente à seção transversal no ponto M

0 ... centro de cisalhamento da seção transversal

h ... distância de 0 à tangente

$r = \overline{OM}$

M' ... ponto correspondente a M na seção empenada

de ... deslocamento linear na direção da tangente

du ... deslocamento linear na direção x

$d\psi$... deslocamento angular elementar da seção A em relação à seção infinitamente próxima A'

A ... linha média da seção transversal da haste antes de sofrer um empenamento

B ... - linha média da seção transversal da haste após sofrer um empenamento

α ... ângulo que $\overline{MM'}$ forma com a tangente.

Temos que:

$$\overline{MM'} \equiv r d\psi$$

$$de = \overline{MM'} \cos \alpha = r d\psi \cos \alpha$$

mas,

$$r \cos \alpha = h$$

então

$$de = h d\psi$$

a distorção γ_{xs} será:

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial e}{\partial x}$$

porém, por hipótese, a distorção na superfície média é desprezada.

então

$$\gamma_{xs} = 0$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial s} = - \frac{\partial e}{\partial x} = - h \frac{\partial \psi}{\partial x} = - h \psi'$$

ou

$$u = - \int h \psi' ds = - \psi' \int h ds$$

mas, a expressão $\int h ds = \omega$, é por definição a coordenada setorial.

Então,

$$u = \mu_0 - \psi' \omega$$

ou

$$u - \mu_0 = - \psi' \omega$$

O empenamento é portanto proporcional à rotação específica ψ' (conseqüentemente, ao momento torçor que a originou) e à função ω (coordenada setorial) que caracteriza a forma do empenamento.

Note-se que o empenamento é função de s e de x .

II.3 - TENSÕES NORMAIS

Da Teoria da Elasticidade temos que os alongamentos unitários são definidos pelas expressões:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_x = \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_x = \frac{\sigma_x}{E_1}$$

Visto serem nulas as tensões σ_y e σ_z na torção pura.

Mas,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \psi'' \omega$$

Portanto, na seção transversal da haste verifica-se uma tensão normal σ_x cuja expressão será

$$\sigma_x = - E_1 \psi'' \omega$$

Quando não existirem na seção outros esforços que deem lugar a tensões normais (momentos fletores e esforços normais) as tensões acima definidas devem estar em equilíbrio, isto é:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad \text{ou} \quad \int - E_1 \psi'' \omega dA = 0$$

$$\int y \sigma_x dA = 0 \quad \text{ou} \quad \int -E_1 \psi'' \omega y dA = 0$$

$$\int z \sigma_x dA = 0 \quad \text{ou} \quad \int -E_1 \psi'' \omega z dA = 0$$

como $E_1 \psi''$ é constante dentro da seção, vem:

$$\int \omega dA = 0$$

$$\int y \omega dA = 0$$

$$\int z \omega dA = 0$$

Expressões essas que constituem propriedades características da função ω , anteriormente definidas como momento estático setorial S_ω , produto de inércia setorial em relação ao eixo Z , $I_{\omega z}$ e produto de inércia setorial em relação ao eixo y , $I_{\omega y}$, respectivamente.

Diz-se que na seção age um bimomento de flexo-torção ou simplesmente bimomento B cuja expressão é:

$$B = \int \sigma_x \omega \, dA$$

(observe-se a analogia com a expressão do momento fletor

$$M = \int \sigma_M y \, dA).$$

A expressão do bimomento pode ser escrita na forma:

$$B = \int -E_1 \psi'' \omega \omega \, dA = \int -E_1 \psi'' \omega^2 \, dA =$$

$$= -E_1 \psi'' \int \omega^2 \, dA = -E_1 \psi'' I_\omega$$

$$B = -E_1 \psi'' I_\omega$$

a tensão normal provocada pelo bimomento terá por expressão:

$$\frac{B}{I_\omega} = -E_1 \psi''$$

$$\frac{B\omega}{I_\omega} = -E_1 \psi'' \omega = \sigma$$

$$\sigma_B = \frac{B\omega}{I_\omega}$$

O Bimomento pode portanto ser considerado como um novo esforço solicitante independente que dá lugar a tensões que se equilibram entre si. Não terá pois influência no deslocamento do eixo da haste nem na rotação da seção transversal.

Quando houver a ação simultânea de força normal e, de momentos fletores além do bimomento, pelo princípio da superposição de efeitos, acharemos a tensão normal resultante pela soma das tensões provocadas por cada uma dessas grandezas.

CONVENÇÃO DE SINAIS:

Por convenção as tensões de tração serão positivas e as de compressão negativas.

Temos as seguintes igualdades:

$$\sigma_B = \frac{B\omega}{I_\omega}$$

como,

$$B = - E_1 I_\omega \psi'' \quad \text{e} \quad \sigma_B = - E_1 \omega \psi''$$

$$u = -\omega \psi'$$

$$\epsilon_x = -\omega \psi'', \quad \sigma_B = E \epsilon_x$$

Podemos formar o seguinte quadro de sinais:

u, ϵ_x	ω	ψ''	σ_B	B
+	+	-	+	+
+	-	+	+	-
-	+	+	-	-
-	-	-	-	+

Seja a peça da Figura II.5

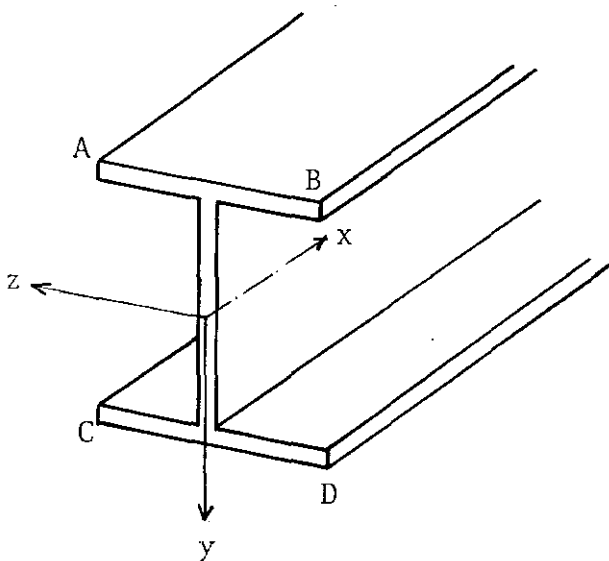


Figura II.5

O diagrama dos coeficientes de empenamento ω terá a forma da Figura II.6. Este diagrama indica a forma da seção após sofrer o empenamento.

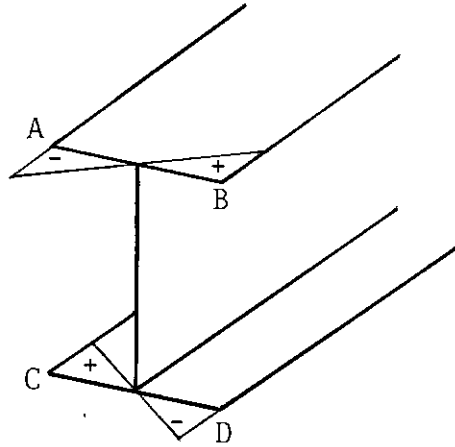


Figura II.6

Se a peça sofrer uma rotação ψ convencionalizada como positiva conforme indica a Figura 7, poderemos montar o quadro de sinais a partir dos sinais dos alongamentos

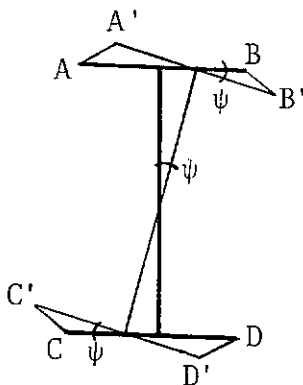


Figura II.7

$$\epsilon_A = +$$

$$\epsilon_B = -$$

$$\epsilon_C = -$$

$$\epsilon_D = +$$

$$\psi = +$$

PONTO	ω	ϵ_x	ψ	σ_B	B
A	-	+	+	+	-
B	+	-	+	-	-
C	+	-	+	-	-
D	-	+	+	+	-

O diagrama de tensões está representado na Figura II.8.

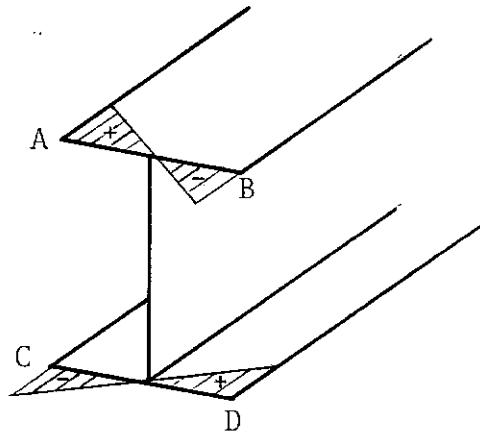


Figura II.8

A ação do Bimomento poderia ser representada por dois pares de força atuando conforme indica a Figura II.9. Esta seria a representação do Bimomento negativo.

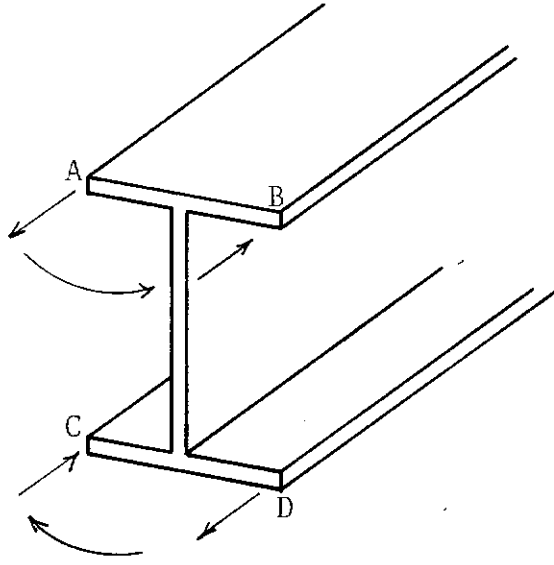


Figura II.9

II.4 - TENSÕES TANGENCIAIS

Estudemos o equilíbrio de um elemento $dx ds$ da haste:

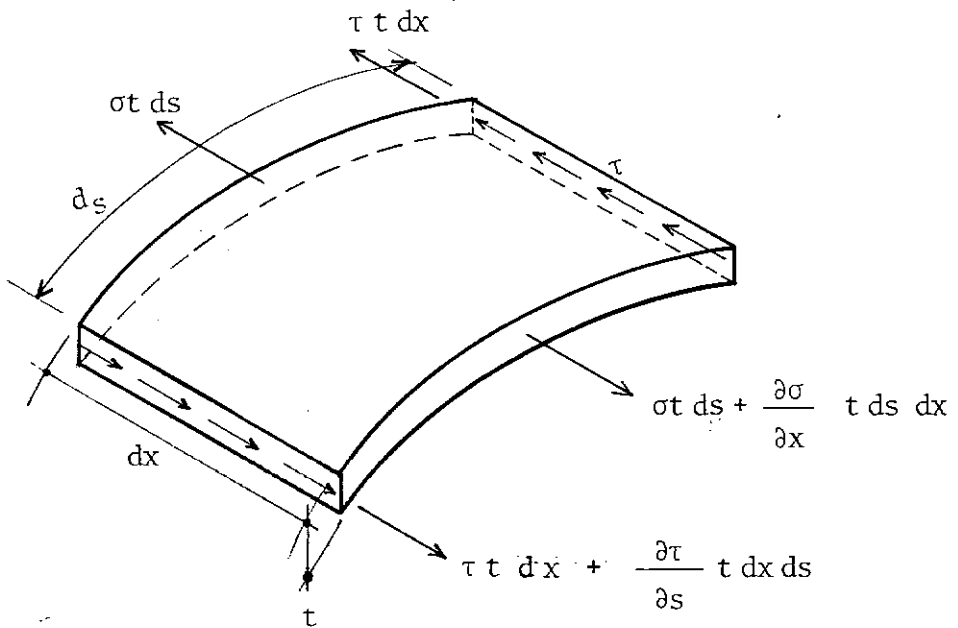


Figura II.10

Nestas duas seções afastadas de dx temos para resultantes das tensões normais $\sigma t ds$ e $\sigma t ds + \frac{\partial \sigma}{\partial x} t ds dx$ respectivamente.

Só haverá equilíbrio se existirem tensões tangenciais τ paralelas ao eixo x tais que:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} t ds dx + \frac{\partial \tau}{\partial s} t dx ds = 0$$

ou

$$\frac{d\sigma}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0$$

Integrando, tiramos o valor de τ :

$$\tau = - \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial x} ds$$

supondo-se que não exista nenhum esforço cisalhante num bordo livre da haste.

Derivando σ em relação a x teremos:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B\omega}{I_\omega} \right) = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\omega}{I_\omega}$$

Substituindo a expressão encontrada na equação acima, vem:

$$\tau = - \frac{\partial B}{\partial x} \cdot \frac{1}{I_{\omega}} \int_0^s \omega \, ds$$

introduzindo a expressão do elemento de área $dA = t \, ds$, vem:

$$\tau = - \frac{\partial B}{\partial x} \cdot \frac{1}{I_{\omega} t} \int_0^s \omega \, t \, ds = - \frac{\partial B}{\partial x} \cdot \frac{1}{I_{\omega} t} \int_0^s \omega \, dA$$

já sabemos que a expressão:

$$\int_0^s \omega \, dA = S_{\omega}$$

é o momento estático setorial do trecho $0-s$;

Teremos então:

$$\tau = -B' \cdot \frac{S_{\omega}}{t I_{\omega}}$$

Provaremos que a derivada do bimomento em relação a x nada mais é do que a torção de empenamento que designare

mos por T_ω . Sendo assim,

$$B' = T_\omega$$

e

$$\tau = -T_\omega \frac{S_\omega}{t I_\omega}$$

T_ω é o momento das tensões de cisalhamento em relação ao centro de cisalhamento da seção.

Demonstraremos que $T_\omega = B' = -E_1 I_\omega \psi'''$

Para que haja equilíbrio, a tensão de cisalhamento τ existente ao longo de dx deverá ser igual à tensão de cisalhamento existente ao longo de ds .

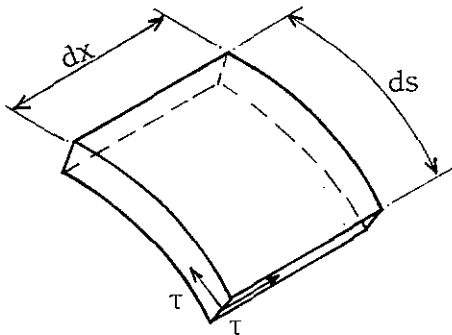


Figura II.11

o momento elementar das tensões de cisalhamento em relação ao centro de cisalhamento da seção será:

$(\tau t ds) h$ sendo h a distância do ponto considerado ao centro de cisalhamento.

o momento resultante T_ω será a integral dos momentos elementares, isto é:

$$T_\omega = \int \tau t h ds$$

mas

$h ds = d\omega$ pela definição de coordenada setorial

então,

$$T_\omega = \int \tau t d\omega$$

substituindo o valor de τ vem,

$$T = \int -B' \frac{S_\omega}{t I_\omega} t d\omega = - \frac{1}{I_\omega} B' \int S_\omega d\omega =$$

$$= - \frac{1}{I_\omega} B' \left| \int_0^L S_\omega d\omega \right| = - \int_0^L \omega dS_\omega$$

como

$S_\omega = 0$ para $s = 0$ e $s = L$ e $dS_\omega = \omega dA$, vem:

$$T_\omega = - \frac{1}{I_\omega} B' \left[- \int \omega^2 dA \right] = \frac{1}{I_\omega} B' I_\omega = B'$$

c.q.d.

OBSERVAÇÕES:

1º) É interessante notar a analogia com a expressão das tensões cisalhantes oriundas da força cortante em peças fletidas ($\tau = \frac{V_y}{b} \frac{S_z}{I_z}$) com a expressão encontrada para as tensões cisalhantes oriundas da torção de empenamento.

$$(\tau = \frac{T_\omega}{t} \frac{S_\omega}{I_\omega})$$

2º) Sendo T o momento de torção total que age na seção e que equilibra os esforços externos, T_v parte correspondente à torção de Saint Venant e T_ω parte correspondente à torção de empenamento, teremos:

$$T = T_v + T_\omega = \psi' G I_t - \psi''' E_1 I_\omega$$

3º) O deslocamento angular da haste ψ' , por não ser influenciado pelo bimomento, também não o será pela torção de empenamento, só se verificando ψ' como efeito da torção de

Saint Venant sendo sua expressão já conhecida da Resistên
cia dos Materiais

$$\psi' = \frac{T_v}{G I_t}$$

4º) Quando além da torção houver a ação simultânea de esforços cortantes, a tensão cisalhante resultante será a soma das tensões provocadas por cada uma dessas grandezas pelo prin
cípio da superposição de efeitos.

5º) As tensões cisalhantes máximas ocorrem no bordo da seção onde a tensão, provocada pela torção de Saint Venant é máx-
xima. Sua expressão é:

$$\tau = \pm T_v \frac{t}{I_t}$$

II.5 - RELAÇÃO ENTRE O ÂNGULO DE ROTAÇÃO DA HASTE ψ E O CARRE
GAMENTO EXTERNO m_t (momento torçor por unidade de com
primento)

(Vide Figura II.12)

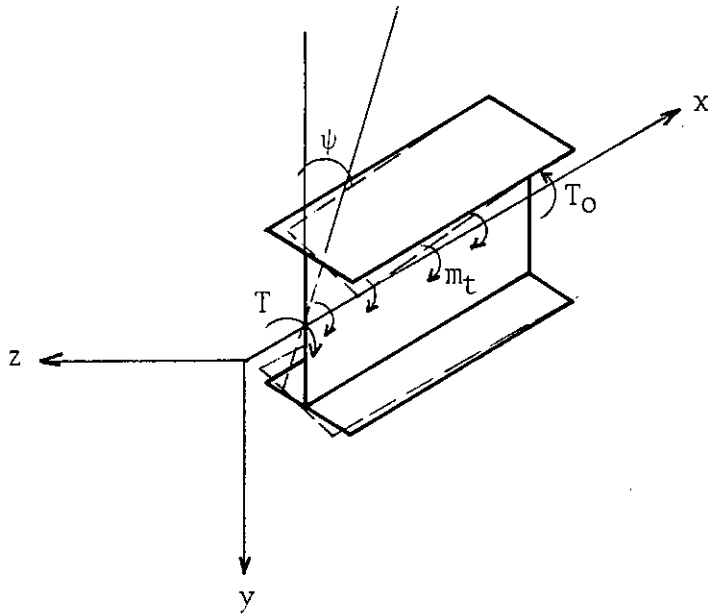


Figura II.12

Estudemos um elemento dx de uma haste:

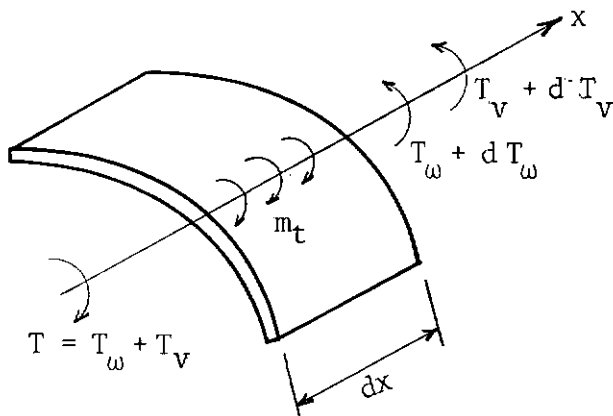


Figura II.13

Na Figura acima estão indicados o carregamento externo m e as forças internas T .

Das condições de equilíbrio temos:

$$T_{\omega} + T_v + m_t dx = T_{\omega} + dT_{\omega} + T_v + dT_v$$

$$m_t dx = dT_{\omega} + dT_v = dT$$

ou

$$\frac{dT_v}{dx} + \frac{dT_{\omega}}{dx} = \frac{dT}{dx} = m_t \quad (1)$$

Do parágrafo II.4 temos que a torção de empenamento T_{ω} é igual à derivada do Bimomento em relação a x .

$$T_{\omega} = B'$$

Do parágrafo II.3 temos a expressão do bimomento em relação ao ângulo de rotação da haste

$$B = -E_1 \psi'' I_{\omega} = -E_1 I_{\omega} \frac{d^2 \psi}{dx^2}$$

Derivando o Bimomento em relação a x obtemos:

$$\frac{dB}{dx} = -E_1 I_{\omega} \frac{d^3 \psi}{dx^3}$$

Substituindo vem:

$$T_{\omega} = -E_1 I_{\omega} \frac{d^3 \psi}{dx^3}$$

Derivando em relação a x vem:

$$\frac{dT_{\omega}}{dx} = -E_1 I_{\omega} \frac{d^4 \psi}{dx^4} \quad (2)$$

Da Resistência de Materiais conhecemos a relação entre o ângulo de rotação e a torção de Saint Venant:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{T_v}{G I_t}$$

Derivando T_v em relação a x vem:

$$\frac{dT_v}{dx} = G I_t \frac{d^2 \psi}{dx^2} \quad (3)$$

Substituindo as equações (2) e (3) em (1), vem:

$$G I_t \frac{d^2 \psi}{dx^2} - E_1 I_{\omega} \frac{d^4 \psi}{dx^4} = m_t$$

Dividindo todos os membros da equação por $E_1 I_\omega$

vem:

$$\frac{G I_t}{E_1 I_\omega} \frac{d^2 \psi}{d x^2} - \frac{d^4 \psi}{d x^4} = \frac{m_t}{E_1 I_\omega}$$

Fazendo $\frac{G I_t}{E_1 I_\omega} = k^2$, vem:

$$\boxed{\frac{d^4 \psi}{d x^4} - k^2 \frac{d^2 \psi}{d x^2} = - \frac{m_t}{E_1 I_\omega}} \quad (4)$$

que é a expressão procurada.

II.6 - A EQUAÇÃO DO BIMOMENTO

Como

$$B = - E_1 I_\omega \frac{d^2 \psi}{d x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 \psi}{d x^2} = - \frac{B}{E_1 I_\omega}$$

$$\frac{d^2 B}{d x^2} = - E_1 I_\omega \frac{d^4 \psi}{d x^4} \quad \text{ou} \quad \frac{d^4 \psi}{d x^4} = - \frac{1}{E_1 I_\omega} \frac{d^2 B}{d x^2}$$

Substituindo estas expressões na equação (4) vem:

$$-\frac{1}{E_1 I_\omega} \frac{d^2 B}{dx^2} + \frac{k^2}{E_1 I_\omega} B = -\frac{m_t}{E_1 I_\omega}$$

ou

$$\boxed{\frac{d^2 B}{dx^2} - k^2 B = m_t = \frac{dT}{dx}} \quad (5)$$

A solução desta equação diferencial é da forma:

$$B = C_1 \operatorname{sh} k x + C_2 \operatorname{ch} k x + m_1$$

sendo m_1 uma solução particular da equação.

Para a determinação das constantes de integração usam-se as condições de extremidade da haste, notando-se que:

. Nas extremidades engastadas:

não há rotação, então $\psi = 0$

não há empenamento, então $u = -\psi' \omega = 0 \therefore \psi' = 0 \therefore T_V = 0$

. Nas extremidades livres de se deformarem:

$$B \text{ é conhecido} \quad B = -E_1 I_\omega \psi''$$

$$T \text{ é conhecido} \quad T = T_v + T_\omega = \psi' G I_t - \psi''' E_1 I_\omega$$

. Nas extremidades em engaste permitindo empenamento (chamadas por Kollbrunner de "apoios em garfo"):

$$\text{não há bimomento: } B = 0 \quad \therefore \quad \psi'' = 0$$

$$\text{não há rotação: } \psi = 0$$

OBSERVAÇÃO:

A solução da equação (5) simplifica-se grandemente quando os valores de k^2 são desprezíveis.

Admitindo-se que k^2 praticamente nulo, a equação fica:

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = m_t \quad (6)$$

equação análoga à da linha elástica de uma viga carregada transversalmente

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{M_z}{E I_z}$$

onde sabemos que

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = - \frac{V_y}{E I_z}$$

e

$$\frac{d^4 y}{d x^4} = - \frac{q}{E I_z}$$

Quando $k = 0$ temos a chamada torção de empenamento pura, isto é:

$$T_v = 0$$

$$m_v = 0$$

então

$$T = T_\omega$$

$$m_t = m_\omega$$

a equação (1) fica:

$$m_{\omega} = \frac{dT_{\omega}}{dx} = -E_1 I_{\omega} \frac{d^4 \psi}{dx^4}$$

Temos ainda que:

$$T_{\omega} = -E_1 I_{\omega} \frac{d^3 \psi}{dx^3}$$

$$B = -E_1 I_{\omega} \frac{d^2 \psi}{dx^2}$$

Tendo em vista a semelhança entre este conjunto de três equações com as equações da flexão simples, podemos aplicar as soluções do segundo conjunto para o primeiro.

Por exemplo: uma viga simplesmente apoiada com vão ℓ sujeita a um carregamento uniformemente distribuído q_y tem:

$$\text{para momento fletor máximo: } M_{\max} = \frac{q_y \ell^2}{8}$$

e

$$\text{para flecha máxima: } y_{\max} = \frac{5}{384} \frac{q_y \ell^4}{E I_z}$$

De forma análoga, uma viga simplesmente apoiada (isto é, sem restrição ao empenamento nos extremos) uniformemente carregada com o momento torçor m_t terá:

para bimomento máximo:
$$B_{\max} = \frac{m_t \ell^2}{8}$$

para ângulo de rotação máximo:
$$\psi_{\max} = \frac{5}{384} \frac{m_t \ell^4}{E_1 I_\omega}$$

Infelizmente, esta analogia com a flexão simples só é válida para valores realmente muito pequenos de k . Não é este o caso dos perfis laminados.

Por outro lado, para valores de k muito grandes teríamos a torção de Saint Venant pura, isto é

$$T_\omega = 0$$

$$m_\omega = 0$$

e

$$T = T_V$$

$$m = m_V$$

a equação (1) fica:

$$m_v = \frac{dT_v}{dx} = G I_t \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

$$T_v = G I_t \frac{d\psi}{dx}$$

$$B = 0$$

$$\text{O coeficiente } k = \sqrt{\frac{G I_t}{E_l I_\omega}}, \text{ que tomou o}$$

nome de "comprimento característico", tem uma grande importância de ordem prática, é um índice do comportamento a torção.

Zbirohowski-Kôscia sugere, a partir de sua experiência pessoal, que as hastes deverão ser obrigatoriamente tratadas como hastes de paredes delgadas quando o valor de k for inferior a $0,5 \text{ in}^{-1}$ ou $1,27 \text{ cm}^{-1}$. Quando o valor de k for superior a $1,0 \text{ in}^{-1}$ ou $2,54 \text{ cm}^{-1}$ as hastes poderão ser tratadas como de paredes espessas. Para valores intermediários de k as hastes podem pertencer a uma ou outra categoria.

Kollbrunner e Basler analisam o produto $k\ell$ (sendo ℓ o vão da haste) concluindo que:

- a) quando $k\ell = 0$ isto é $I_\omega \rightarrow \infty$ teremos torção de empennamento pura tornando-se o estudo análogo ao da teoria da flexão;

- b) quando $k \ell \lesssim 2$ a torção de empenamento domina;
- c) quando $2 < k \ell < 5$ a torção é mista, isto é, tanto a torção de empenamento quanto a torção de Saint Venant são relevantes;
- d) quando $k \ell \gtrsim 5$ domina a torção de Saint Venant;
- e) Finalmente, quando $k \ell = \infty$ isto é $I_\omega \rightarrow 0$ teremos a torção de Saint Venant pura.

II.7 - EXEMPLO RESOLVIDO

Resolver a haste indicada

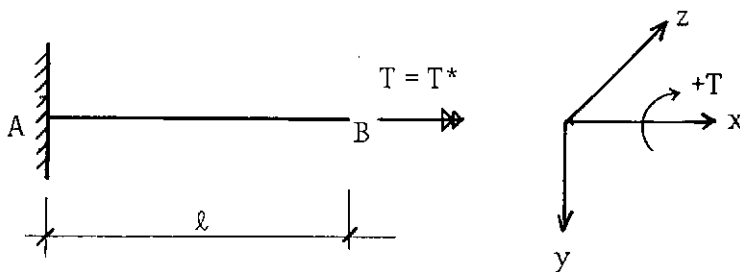


Figura II.14

apoio A : engaste a torção

apoio B : extremidade livre

Equação diferencial do ângulo de rotação:

$$\frac{d^4 \psi}{dx^4} - k^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} = - \frac{m t}{E_1 I_{\omega}} = - \frac{1}{E_1 I_{\omega}} \frac{dT}{dx}$$

se T é constante, o segundo membro da equação se anula,

então,

$$\frac{d^4 \psi}{dx^4} - k^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0$$

a solução desta equação é da forma:

$$\psi = C_1 + C_2 x + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx$$

Derivando, obtemos:

$$\psi' = C_2 + k C_3 \operatorname{sh} kx + k C_4 \operatorname{ch} kx$$

$$\psi'' = k^2 C_3 \operatorname{ch} kx + k^2 C_4 \operatorname{sh} kx$$

$$\psi''' = k^3 C_3 \operatorname{sh} kx + k^3 C_4 \operatorname{ch} kx$$

Para determinarmos os valores das constantes de integração, lançamos mão das condições de extremidade da haste:

extremidade A: para $x = 0$ $\psi = 0$

$$\psi' = 0$$

extremidade B: para $x = \ell$ $T = T^*$

$$B = 0$$

$$x = 0 \quad 0 = C_1 + C_3 \quad \therefore \quad C_1 = -C_3 \quad (1)$$

$$0 = C_2 + k C_4 \quad \therefore \quad C_4 = -\frac{C_2}{k} \quad (2)$$

$$x = \ell \quad B = 0 \quad \text{mas} \quad B = -E_1 I_\omega \psi'' \quad \therefore \quad \psi'' = 0$$

$$0 = k^2 C_3 \operatorname{ch} k \ell + k^2 C_4 \operatorname{sh} k \ell \therefore C_3 = -C_4 \frac{\operatorname{sh} k \ell}{\operatorname{ch} k \ell} \quad (3)$$

$$T = T^*$$

mas

$$T = T_V + T_\omega = G I_t \psi' - E_1 I_\omega \psi'''$$

então

$$\frac{T^*}{E_1 I_\omega} = \frac{G I_t}{E_1 I_\omega} \psi' - \psi''' = k^2 \psi' - \psi'''$$

$$\psi'(\ell) = C_2 + k C_3 \operatorname{sh} k \ell + k C_4 \operatorname{ch} k \ell$$

$$\psi'''(\ell) = k^3 C_3 \operatorname{sh} k \ell + k^3 C_4 \operatorname{ch} k \ell$$

$$\frac{T^*}{E_1 I_\omega} = k^2 C_2 + k^3 C_3 \operatorname{sh} k \ell + k^3 C_4 \operatorname{ch} k \ell - k^3 C_3 \operatorname{sh} k \ell - k^3 C_4 \operatorname{ch} k \ell =$$

$$= k^2 C_2 \quad \therefore \quad C_2 = \frac{T^*}{k^2 E_1 I_\omega} = \frac{T^*}{G I_t} \frac{E_1 I_\omega}{E_1 I_\omega} = \frac{T^*}{G I_t}$$

$$\therefore C_4 = \frac{-T^*}{k G I_t}$$

$$\therefore C_3 = \frac{T^*}{k G I_t} \frac{\operatorname{sh} k \ell}{\operatorname{ch} k \ell}$$

$$\therefore C_1 = - \frac{T^*}{k G I_t} \frac{\operatorname{sh} k \ell}{\operatorname{ch} k \ell}$$

Substituindo os valores encontrados na equação do ângulo de rotação, vem:

$$G I_t \psi = T^* \left[- \frac{1}{k} \frac{\operatorname{sh} k \ell}{\operatorname{ch} k \ell} + x + \frac{1}{k} \frac{\operatorname{sh} k \ell}{\operatorname{ch} k \ell} \operatorname{ch} k x - \frac{1}{k} \operatorname{sh} k x \right]$$

Para achar a expressão da torção de Saint Venant basta fazer:

$$T_V = G I_t \psi' = T^* \left[1 + \frac{\text{sh } k\ell}{\text{ch } k\ell} \text{sh } kx - \text{ch } kx \right]$$

A expressão do Bimomento será encontrada através da relação:

$$B = -E_1 I_\omega \psi''$$

$$B = -E_1 I_\omega \frac{T^*}{G I_t} \left[k \frac{\text{sh } k\ell}{\text{ch } k\ell} \text{ch } kx - k \text{sh } kx \right] =$$

$$= \frac{T^*}{k^2} k \left[\text{sh } kx - \frac{\text{sh } k\ell}{\text{ch } k\ell} \text{ch } kx \right]$$

$$B = \frac{T^*}{k} \left[\text{sh } kx - \frac{\text{sh } k\ell}{\text{ch } k\ell} \text{ch } kx \right]$$

Finalmente a torção de empenamento será:

$$T_\omega = B' = \frac{T^*}{k} \left[k \text{ch } kx - k \frac{\text{sh } k\ell}{\text{ch } k\ell} \text{sh } kx \right]$$

$$T_{\omega} = T^* \left[\begin{array}{c} \text{ch } k x - \frac{\text{sh } k \ell}{\text{ch } k \ell} \text{ sh } k x \end{array} \right]$$

OBSERVAÇÃO: As expressões de ψ , T_v , B e T_{ω} para hastes com diferentes tipos de apoios encontram-se nas Tabelas 1 da Bibliografia |⁵|

CAPÍTULO III

RESOLUÇÃO DE VIGAS CONTÍNUAS

III.1 - INTRODUÇÃO

São sete os tipos de carregamentos que podem atuar numa haste:

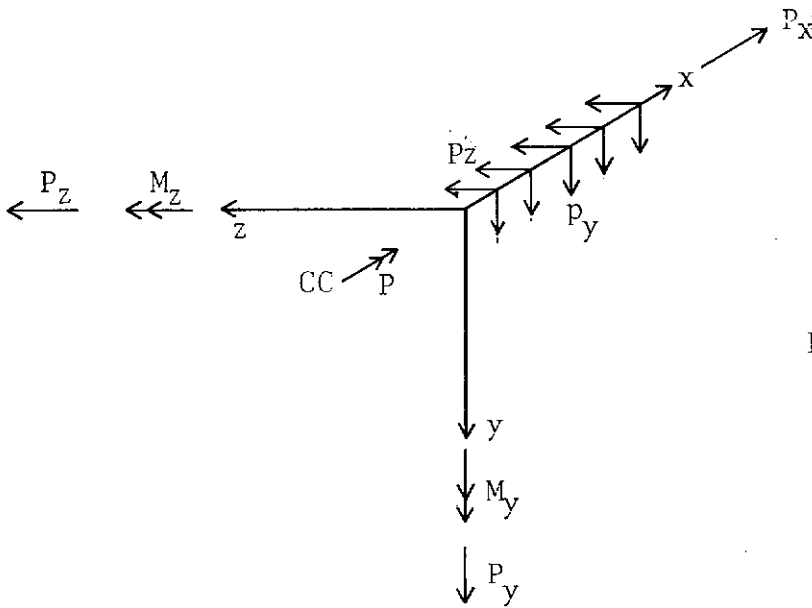


Figura III.1

- 1) P_x carga concentrada paralela ao eixo x - esforço normal
- 2) P_y carga concentrada paralela ao eixo y - carga concentrada vertical
- p_y carga vertical distribuída
- 3) P_z carga concentrada paralela ao eixo z - esforço horizontal
- p_z carga horizontal distribuída

- 4) M_z carga momento - momento fletor
 m_z carga momento distribuída
- 5) M_y carga momento - momento fletor transversal
 m_y carga momento distribuída
- 6) T momento torçor (em relação ao centro de cisalhamento)
 m_t momento torçor distribuído (em relação ao centro de cisalhamento)
- 7) B bimomento concentrado
 m_B bimomento distribuído

Os carregamentos que não provocam torção podem ser estudados pela hiperestática corrente.

São estes:

$$P_x, P_y, p_y, P_z, p_z, M_z, m_z, M_y, m_y$$

Serão objeto de nosso estudo os carregamentos que provocam torção. A saber:

$$T, m_t, B, m_B$$

Desenvolveremos a solução das vigas contínuas pelos dois métodos usuais da hiperestática, quais sejam, o método das forças e o método dos deslocamentos.

III.2 - MÉTODO DAS FORÇAS

A hiperestática corrente nos fornece o seguinte roteiro para a resolução de estruturas pelo método das forças:

- 1) Escolha do Sistema Principal - Sistema Principal nada mais é do que a estrutura dada com uma quantidade de vínculos rompidos tal que a transforme numa estrutura isostática;
- 2) Traçado dos diagramas no Sistema Principal - São traçados os diagramas para os esforços x_i introduzidos existentes nos vínculos rompidos e para as solicitações externas;
- 3) Obtenção dos coeficientes δ - os coeficientes são as deformações que surgem com o rompimento dos vínculos;
- 4) Formulação do sistema de equações de compatibilidade elástica - ao romper vínculos, liberamos deformações que não existem - devemos então impor à estrutura do sistema principal a condição de serem nulos os deslocamentos na direção dos hiperestáticos;
- 5) Obtenção dos hiperestáticos através da solução da equação matricial

$$\{X\} = - |\beta| \{\delta_0\}$$

sendo

$\{X\} \rightarrow$ vetor dos hiperestáticos

$|\beta| = |\delta|^{-1}$ matriz de rigidez da estrutura (matriz inversa da matriz de flexibilidade)

$\{\delta_0\} \rightarrow$ vetor dos termos de carga (onde a influência do carregamento se faz sentir)

6) Obtenção dos efeitos finais através da equação:

$$E = E_0 + \sum E_i X_i$$

sendo

E_0 : esforço no sistema principal provocado pelas solicitações externas;

E_i : esforço no sistema principal provocado pelas solicitações do hiperestático X_i com o valor inicialmente arbitrado.

Procuremos generalizar o estudo da hiperestática usual para sistemas de hastes de paredes delgadas com perfil aberto.

Façamos o estudo de uma viga contínua conforme indica a Figura III.2.

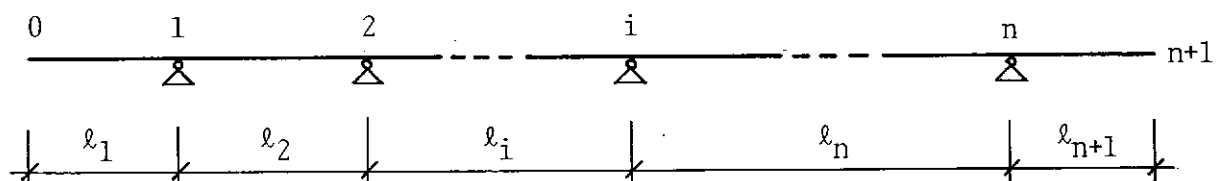


Figura III.2

Examinemos o roteiro acima descrito.

1) Escolha do Sistema Principal

O apoio simbolizado por \triangle admite torção. É chamado por Kollbrunner de "apoio em garfo" (Gabellagerung).

Deveremos escolher um Sistema Principal para o qual os diagramas de Bimomento das barras isoladas sejam conhecidos e estaticamente determinados para o momento torçor.

Transformaremos então os apoios em garfo em articulações de bimomentos cujo símbolo é \triangle^{\cdot} .

Os pares de bimomentos passam a ser os hiperes-táticos X_i .

O Sistema Principal está indicado na Figura III.3.

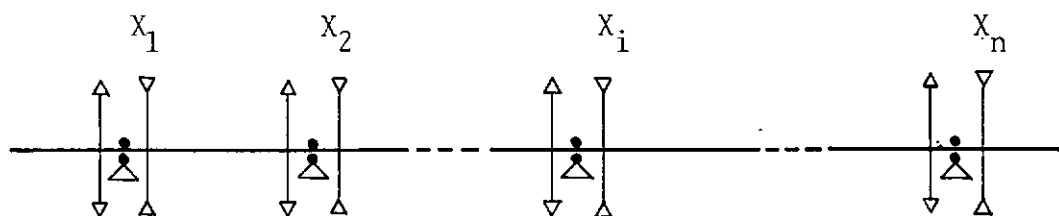


Figura III.3

Observemos que para $n + 1$ vãos teremos n incôgnitas. Para apoios extremos, no entanto, os ângulos de rotação são nulos; neste caso, para n vãos, teremos $n - 1$ incôgnitas.

2) Traçado dos Diagramas no Sistema Principal

Estes diagramas são facilmente obtidos através das Tabelas 1 | ⁵ |.

examinando os vãos i e $i + 1$ teríamos

(Vide Figura III.4)

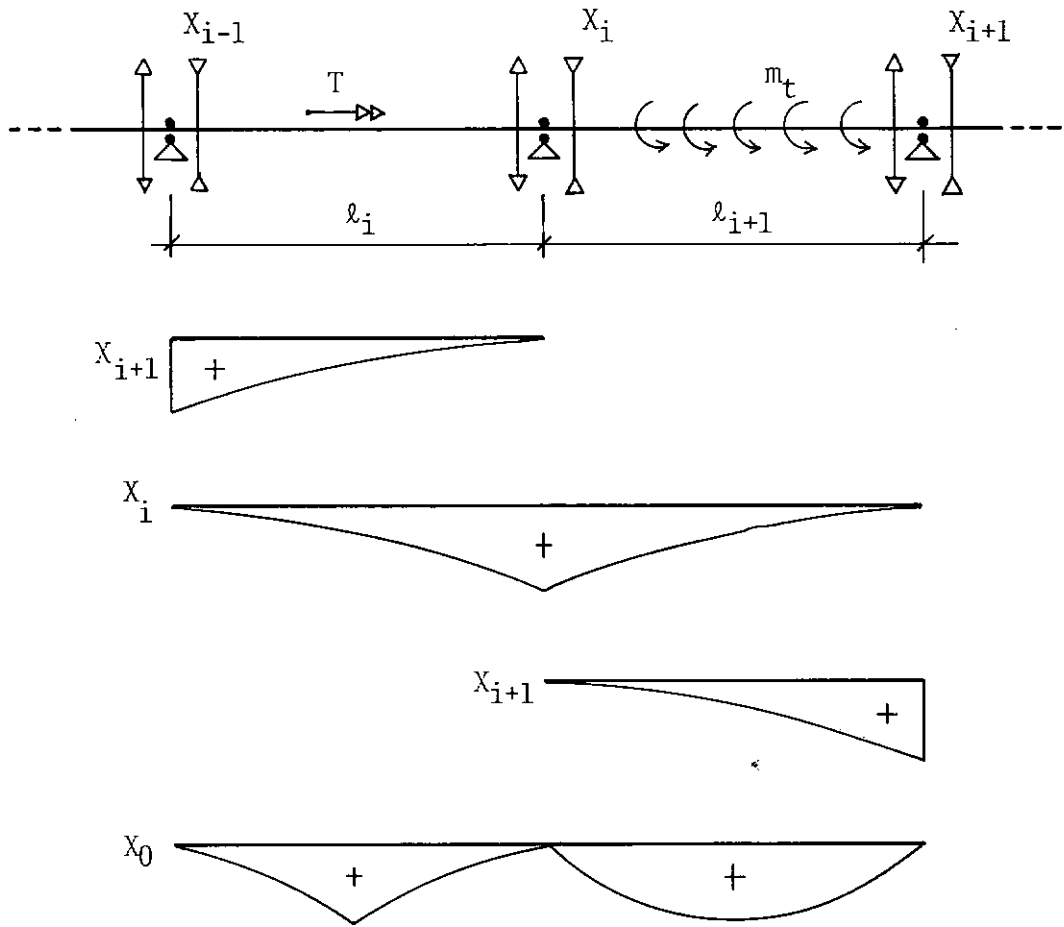


Figura III.4

3) Cálculo das Deformações

A deformação provocada pelo bimomento é o empenamento $u = -\omega\psi'$.

Pelo princípio dos Trabalhos Virtuais temos que o trabalho virtual realizado pelas forças externas será igual ao trabalho virtual realizado pelas forças internas.

- Trabalho virtual das forças externas

$$W_{\text{ext}} = \bar{P} \delta$$

onde

\bar{P} representa a carga virtual, que neste caso é o bimomento B unitário.

δ representa o deslocamento virtual que neste caso é expresso pela rotação específica ψ' que caracteriza o empenamento da seção transversal

- Trabalho virtual das forças internas

Como estamos no regime linear onde é válido o princípio da superposição de efeitos, o trabalho virtual realizado pelas forças internas será a soma dos trabalhos virtuais de deformação devidos a cada um dos esforços simples atuantes na estrutura;

- Trabalho armazenado pelo bimomento:

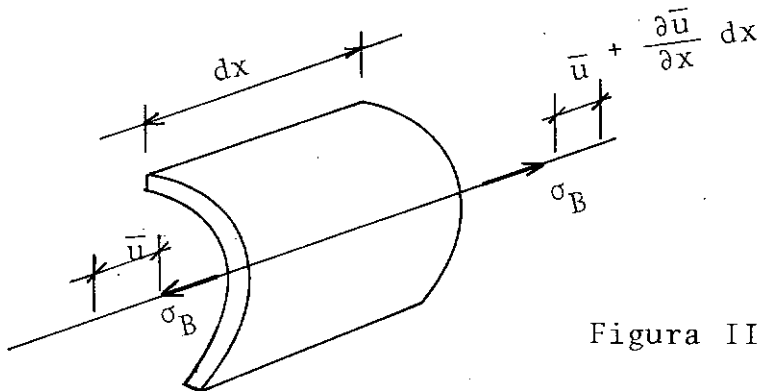


Figura III.5

se houver um deslocamento virtual \bar{u} , o trabalho virtual realizado dW_B será:

$$\sigma_B \left(\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx \right) - \sigma_B \bar{u} = \sigma_B \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx = dW_B$$

sendo σ_B a tensão normal provocada pelo bimomento.

Integrando ao longo da área da seção transversal A e do comprimento da peça L, teremos:

$$\int_A \int_L \sigma_B \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx dA = W_B$$

mas sabemos que $\bar{u} = -\omega \psi'$

então

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\omega \psi''$$

Sabemos também que $\bar{B} = -E I_\omega \psi''$

então

$$\psi'' = -\frac{\bar{B}}{E I_\omega} \text{ e } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\bar{B}}{E I_\omega} \omega$$

a expressão da tensão normal provocada pelo Bimomento é:

$$\sigma_B = \frac{B}{I_\omega} \omega$$

Substituindo estas expressões na equação acima teremos:

$$W_B = \int_A \int_L \left(\frac{B}{I_\omega} \omega \right) \left(\frac{\bar{B}}{E I_\omega} \omega \right) dx dA =$$

$$\int_L dx \frac{B \bar{B}}{E I_\omega^2} \int_A \omega^2 dA$$

porém, por definição $\int_A \omega^2 dA = I_\omega$.

simplificando, vem:

$$W_B = \int_L \frac{B \bar{B}}{E I_\omega} dx$$

expressão análoga à do trabalho virtual realizado pelo momento fletor.

- Trabalho armazenado pelo momento torçor

Conforme já vimos, o momento torçor se subdivide em torção de Saint Venant e torção de empenamento. A expressão do trabalho realizado pela primeira é amplamente conhecida pelas fórmulas de Resistência dos Materiais, isto é:

$$W_V = \int \frac{\bar{T}_V T_V dx}{G I_t}$$

O trabalho realizado pela 2.^a será nulo tendo em vista a hipótese simplificadora exposta no item II.1 (é nula a distorção no plano médio da seção).

Igualando o trabalho realizado pelas forças externas ao trabalho realizado pelas forças internas, teríamos:

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}}$$

$$1 \times \delta = \psi' = \int_L \frac{B \bar{B}}{E I_{\omega}} dx + \int \frac{T_v \bar{T}_v}{G I_t} dx$$

que é a expressão da deformação.

Estas grandezas podem ser calculadas pela Tabela 3 |⁵|.

OBSERVAÇÃO: quando se despreza a torção de Saint Venant (para hastes com $kl \simeq 0$) os diagramas de Bimomento se tornam triangulares e há uma perfeita analogia com a teoria da flexão.

4) Equações de Compatibilidade

Examinando os vãos i e $i+1$ teremos:

$$X_{i-1} \psi'_{i, i-1} + X_i \psi'_{i, i} + X_{i+1} \psi'_{i, i+1} + \psi'_{i0} = 0$$

$i=1, 2, \dots, n$

sendo

$\psi'_{i, i-1}$... a rotação específica da barra i no nó i devida ao carregamento $X_{i-1} = 1$

O primeiro índice indica a seção para a qual se deseja conhecer ψ' ; o segundo índice indica o nó onde o momento $X_{i-1} = 1$ age.

$$\psi'_{i, i} = \psi'^e_{i, i} + \psi'^d_{i, i}$$

$$\psi'_{i0} = \psi'^e_{i0} + \psi'^d_{i0}$$

sendo

ψ'^e_{i0} ... a rotação específica da barra i no nó i devida ao carregamento dado.

ψ'^d_{i0} ... a rotação específica da barra $i+1$ no nó i devida ao carregamento dado.

Os itens 5 e 6 são resolvidos de maneira idêntica à da hiperestática usual.

III.3 - EXEMPLO RESOLVIDO

Cálculo de uma viga contínua constituída por

hastes de paredes delgadas sobre três apoios pelo método das forças.

OBSERVAÇÃO: os apoios oferecem resistência à rotação mas não oferecem resistência ao empenamento.

Trata-se de um perfil \square 6" x 2" x 0,231 KN/m sujeito à ação de um momento torçor igual a 1 mKN na seção do meio do primeiro vão.

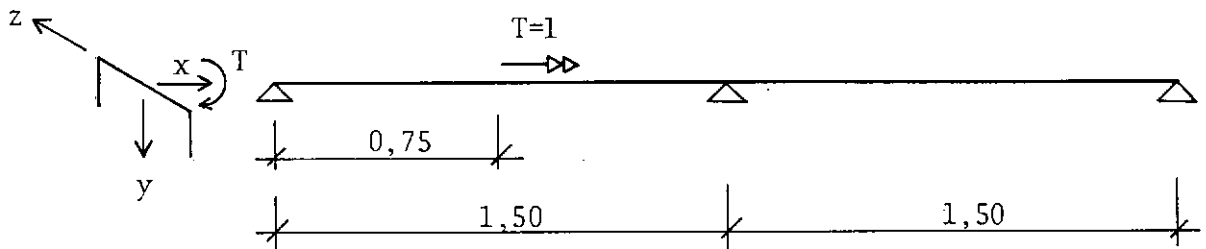


Figura III.6

Sabemos que:

$$I_t = \sum_n S_n t_n^3 = 2 \times \frac{5,08 \times 0,89^3}{3} + \frac{14,35 \times 1,42^3}{3} = 16,1 \text{ cm}^4$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

$$I_\omega = 2288,2 \text{ cm}^6 \quad (\text{calculado no Capítulo I})$$

$$k = \sqrt{\frac{G}{E_1} \frac{I_t}{I_\omega}} = \sqrt{\frac{(1-\nu)}{2} \frac{I_t}{I_\omega}} = \sqrt{\frac{0,7}{2} \frac{16,1}{2288,2}} = 0,0496 \text{ cm}^{-1} = 4,96 \text{ m}^{-1}$$

número de barras: 2

número de incógnitas: 1

1) Sistema Principal

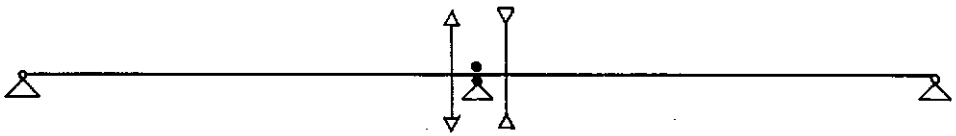


Figura III.7

2) Diagramas Auxiliares

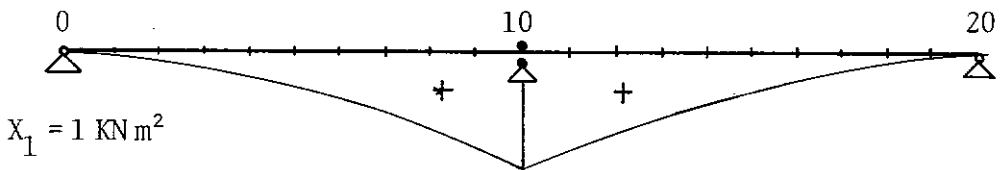


Figura III.8

pela Tabela 1, número 9 |⁵|, temos:

$$1^\circ \text{ vão: } B_1 - \frac{\text{sh } kx}{\text{sh } kl} X_1 = \frac{\text{sh } 4,96 x}{\text{sh } (4,96 \times 1,50)} = \frac{\text{sh } (4,96 x)}{851,37}$$

$$2^{\circ} \text{ vão: } B_1 = - \left[\frac{\text{ch } k\ell}{\text{sh } k\ell} \text{sh } kx - \text{ch } kx \right] X_1 =$$

$$= - \frac{\text{ch } (4,96 \times 1,50)}{\text{sh } (4,96 \times 1,50)} \text{sh } 4,96x + \text{ch } 4,96x =$$

$$= \text{ch } 4,96x - \text{sh } 4,96x$$

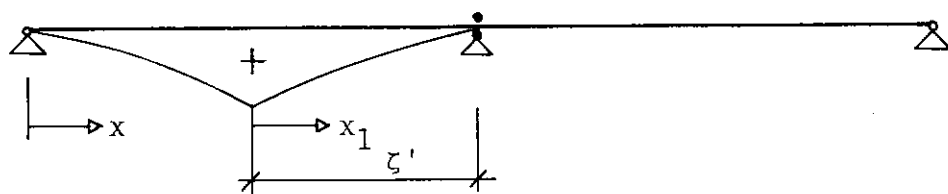


Figura III.9

pela Tabela 1, nº 2 | ⁵ | temos:

$$B_0 = \frac{1}{k} \frac{\text{sh } (k \zeta') \text{sh } kx}{\text{sh } k\ell} \quad \text{para } 0 \leq x \leq \ell - \zeta'$$

e

$$B_0 = \frac{1}{k} \frac{\text{sh } (k \zeta') \text{sh } kx}{\text{sh } k\ell} - \frac{1}{k} \text{sh } (k x_1) \quad \text{para } \ell - \zeta' \leq x \leq \ell$$

Substituindo os valores dados, encontramos:

$$B_0 = \frac{1}{4,96} \frac{\text{sh}(4,96 \times 0,75) \text{sh}(4,96x)}{\text{sh}(4,96 \times 1,50)} = \frac{\text{sh}(4,96x)}{204,79}$$

$$\text{para } 0 \leq x \leq \ell - \zeta'$$

e

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{4,96} \frac{\text{sh}(4,96 \times 0,75) \text{sh}(4,96x)}{\text{sh}(4,96 \times 1,50)} - \frac{1}{4,96} \text{sh}(4,96 x_1) = \\ &= \frac{\text{sh}(4,96 x)}{204,79} - \frac{\text{sh}(4,96 x_1)}{4,96} \quad \text{para } \ell - \zeta' \leq x \leq \ell \end{aligned}$$

3) Coeficientes

Pela Tabela 3, nº 14 | ⁵ |, vem:

$$E I_{\omega} \delta_{11} = (\chi' B \bar{B} \ell)^2$$

sendo

$$\chi' = \frac{1}{k\ell} \left(\frac{1}{\text{th}(k\ell)} - \frac{1}{k\ell} \right)$$

Substituindo os valores dados encontramos:

$$E I_{\omega} \delta_{11} = \frac{2}{4,96 \times 1,50} \left(\frac{1}{\text{th}(4,96 \times 1,50)} - \frac{1}{4,96 \times 1,50} \right) 1 \times 1 \times 1,50 = 0,3490$$

pela Tabela 3, nº 1

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_a T B \ell^2$$

sendo

$$\chi'_a = \frac{1}{(k\ell)^2} \left[\left(\frac{\zeta'}{\ell} - \frac{\text{sh}(k\zeta')}{\text{sh}(k\ell)} \right) \right]$$

Substituindo os valores numéricos, encontramos:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \frac{1}{(4,96 \times 1,50)^2} \left[\left(\frac{0,75}{1,50} - \frac{\text{sh}(4,96 \times 0,75)}{\text{sh}(4,96 \times 1,50)} \right) \right] 1 \times 1 \times 1,50^2 = 0,0193$$

4) Equação de compatibilidade

$$E I_{\omega} \delta_{11} X_1 + E I_{\omega} \delta_{10} = Q$$

5) Obtenção do Hiperestático

$$X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{0,0193}{0,3490} = -0,0553 \text{ KN m}^2$$

6) Diagramas Finais

6.1) Diagrama de Bimomentos

$$B = B_0 + B_1 X_1$$

1º vão:

$$B = \frac{\text{sh } 4,96 x}{204,79} - \frac{\text{sh } 4,96 x}{851,37} \cdot 0,0553 = \frac{\text{sh } 4,96 x}{207,55}$$

para $0 \leq x \leq \ell - \zeta' = 0,75$

$$B = \frac{\text{sh } 4,96 x}{204,79} - \frac{\text{sh } 4,96 x_1}{4,96} - \frac{\text{sh } 4,96 x}{851,37} \cdot 0,0553 =$$

$$= \frac{\text{sh } 4,96 x}{207,55} - \frac{\text{sh } 4,96 x_1}{4,96} \quad \text{para } 0,75 \leq x \leq \ell$$

Substituindo os valores de x e x_1 na equação acima, formamos o seguinte quadro para o 1º vão da viga:

Seção.	x	x_1	B
0	0,00	-	0
1	0,15	-	0,0039
2	0,30	-	0,0101
3	0,45	-	0,0222
4	0,60	-	0,0471
5	0,75	0,00	0,0993
6	0,90	0,15	0,0449
7	1,05	0,30	0,0166
8	1,20	0,45	-0,0022
9	1,35	0,60	-0,0223
10	1,50	0,75	-0,0553

2º vão:

$$B = 0 - (\text{ch } 4,96 x - \text{sh } 4,96 x) 0,0553 =$$

$$= 0,0553 (\text{sh } 4,96 x - \text{ch } 4,96 x)$$

Quadro de valores do Bimomento para o 2º vão da

viga:

Seção	x	B (KNm ²)
10	0	-0,0553
11	0,15	-0,0263
12	0,30	-0,0125
13	0,45	-0,0059
14	0,60	-0,0028
15	0,75	-0,0013
16	0,90	-0,0006
17	1,05	-0,0003
18	1,20	-0,0001
19	1,35	-0,0001
20	1,50	0

Diagrama dos Bimomentos

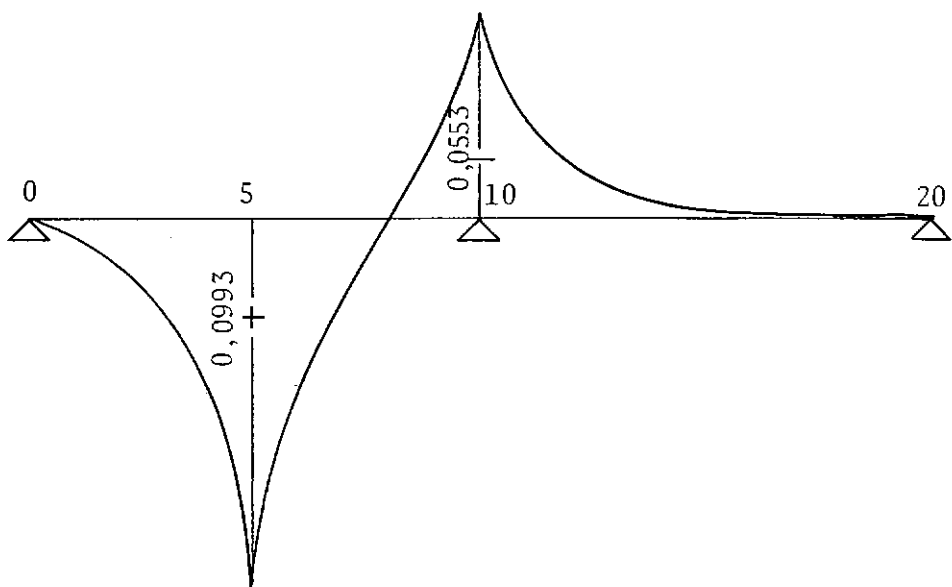


Figura III.10

DIAGRAMAS DE TORÇÃO

1º) Diagrama de Torção Total

Obtido a partir do diagrama de Bimomentos.

$$T_0 = -\left(\frac{T}{2} - \frac{B_{10}}{\ell}\right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{0,0553}{1,50}\right) = -0,4631 \text{ mKN}$$

$$T_5^d = T - T_0 = -0,4631 + 1 = +0,5369 \text{ mKN}$$

$$T_{10}^e = -\left(\frac{T}{2} + \frac{B_{10}}{\ell}\right) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{0,0553}{1,50}\right) = -0,5369 \text{ mKN}$$

$$T_{10}^d = -\frac{B_{10}}{\ell} = \frac{-0,0553}{1,50} = -0,0369 \text{ mKN}$$

$$T_{20} = \frac{B_{10}}{\ell} = 0,0369 \text{ mKN}$$

Diagrama de torção total:

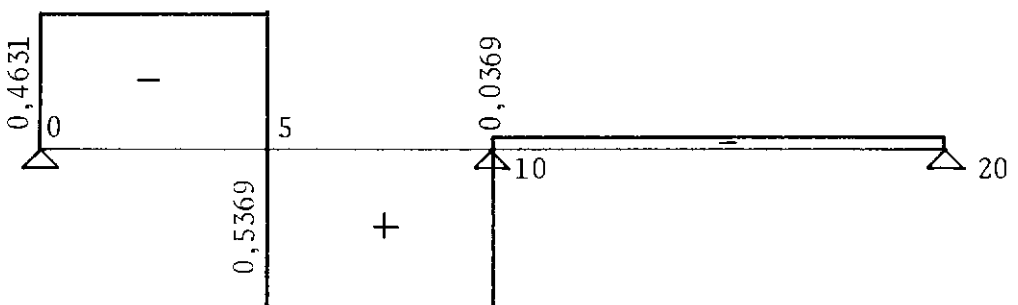


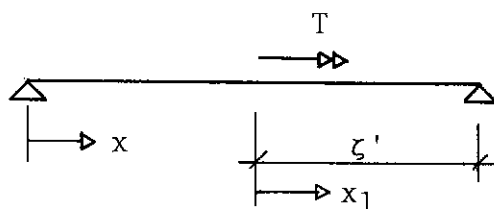
Figura III.11

Este diagrama é determinado de forma análoga ao diagrama de esforços cortantes a partir do diagrama de momentos fletores.

2º) Diagrama de Torção de Saint Venant

$$T_v = T_{v_0} + T_{v_1} X_1$$

1º vão: pela Tabela 1, nº 2 | ⁵ | temos:



$$T_{v_0} = \frac{\zeta'}{l} - \frac{\text{sh } k \zeta'}{\text{sh } k l} \text{ch } kx =$$

$$= \frac{0,75}{1,50} - \frac{\text{sh } 4,96 \times 0,75}{\text{sh } 4,96 \times 1,50} \text{ch } 4,96 x =$$

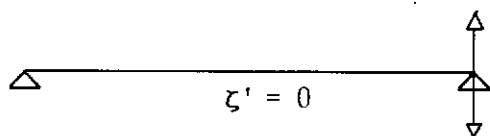
$$= 0,5 - \frac{\text{ch } 4,96 x}{41,29} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 0,75$$

$$T_{v_0} = \frac{\zeta'}{l} - \frac{\text{sh } k \zeta'}{\text{sh } k l} \text{ch } kx - 1 + \text{ch } k x_1 =$$

$$= 0,5 - \frac{\text{ch } 4,96 x}{41,29} - 1 + \text{ch } 4,96 x_1 =$$

$$= \text{ch } 4,96 x_1 - \frac{\text{ch } 4,96 x}{41,29} - 0,5 \quad \text{para } 0,75 \leq x \leq 1,50$$

pela Tabela 1, nº 9 | 5 | temos:



$$\begin{aligned}
 T_{V_1} &= \frac{1}{l} - \frac{k \operatorname{ch} k z'}{\operatorname{sh} k l} \operatorname{ch} k x = \\
 &= \frac{1}{1,50} - 4,96 \frac{\operatorname{ch} 4,96 x 0}{\operatorname{sh} 4,96 x 1,50} \operatorname{ch} 4,96 x = \\
 &= 0,67 - \frac{\operatorname{ch} 4,96 x}{171,65}
 \end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados para T_{V_0} , T_{V_1} e X_1 , temos:

para $0 \leq x \leq 0,75$

$$\begin{aligned}
 T_V &= 0,5 - \frac{\operatorname{ch} 4,96 x}{41,29} - 0,0553 \left(0,67 - \frac{\operatorname{ch} 4,96 x}{171,65} \right) = \\
 &= 0,46 - \frac{\operatorname{ch} 4,96 x}{41,85}
 \end{aligned}$$

para $0,75 \leq x \leq 1,50$

$$T_V = \text{ch } 4,96 x_1 - \frac{\text{ch } 4,96 x}{41,29} - 0,5 - 0,0553 \left(0,67 - \frac{\text{ch } 4,96 x}{171,65} \right)$$

$$= \text{ch } 4,96 x_1 - \frac{\text{ch } 4,96 x}{41,85} - 0,54$$

Quadro de valores do 1º vão para a torção de Saint

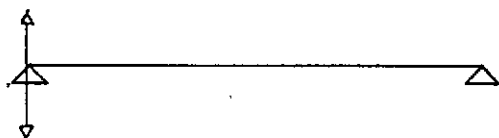
Venant:

Seção	x	x_1	T_V (mKN)
0	0	-	-0,4361
1	0,15	-	-0,4292
2	0,30	-	-0,4044
3	0,45	-	-0,3474
4	0,60	-	-0,2251
5	0,75	0	+0,0333
6	0,90	0,15	+0,2878
7	1,05	0,30	+0,3962
8	1,20	0,45	+0,4212
9	1,35	0,60	+0,3773
10	1,50	0,75	+0,2392

2º vão:

$$T_{V_0} = 0$$

T_{V_1} será obtido através da Tabela 1, nº 9 | 5 |



$$T_{V_1} = - \left(\frac{1}{l} - k \frac{\text{ch } k \cdot \zeta'}{\text{sh } k l} \text{ch } kx + k \text{sh } kx \right) \text{ sendo } \zeta' = l.$$

$$= - \left(\frac{1}{1,50} - 4,96 \frac{\text{ch } 4,96 \times 1,50}{\text{sh } 4,96 \times 1,50} \text{ch } 4,96 x + 4,96 \text{sh } 4,96 x \right) =$$

$$= - (0,67 - 4,96 \text{ch } 4,96 x + 4,96 \text{sh } 4,96 x)$$

$$T_V = 0,0553 (0,67 - 4,96 \text{ch } 4,96 x + 4,96 \text{sh } 4,96 x) =$$

$$= \frac{1}{27} - 0,27 \text{ch } 4,96 x + 0,27 \text{sh } 4,96 x$$

Quadro de valores do 2º vão para a torção de

Saint Venant

Seção	x	T_V (mKN)
10	0	+0,2330
11	0,15	+0,0913
12	0,30	+0,0239
13	0,45	-0,0081
14	0,60	-0,0233
15	0,75	-0,0305
16	0,90	-0,0339
17	1,05	-0,0356
18	1,20	-0,0363
19	1,35	-0,0367
20	1,50	-0,0369

Diagrama da Torção de Saint Venant

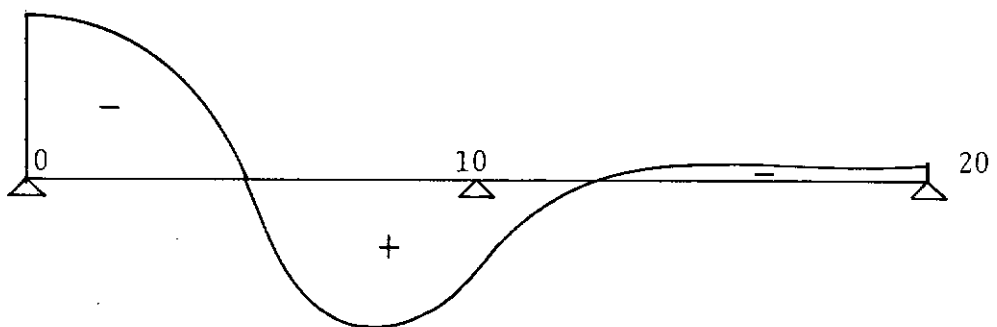
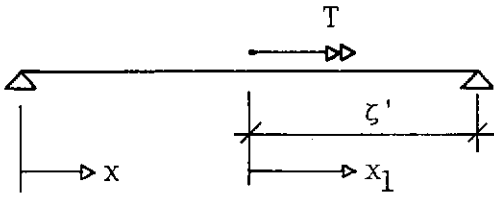


Figura III.12

3º) Diagrama de Torção de Empenamento

$$T_{\omega} = T_{\omega_0} + X_1 T_{\omega_1}$$

Da Tabela 1, nº 2 | ⁵ | retiramos a expressão de T_{ω_0} para o 1º vão:



$$T_{\omega_0} = \frac{\text{sh } k z'}{\text{sh } k \ell} \text{ch } k x$$

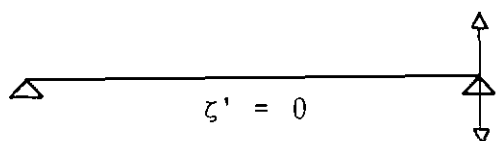
$$= \frac{\text{sh } 4,96 \times 0,75}{\text{sh } 4,96 \times 1,50} \text{ch } 4,96 x =$$

$$= \frac{\text{ch } 4,96 x}{41,29} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 0,75$$

$$T_{\omega_0} = \frac{\text{sh } k z'}{\text{sh } k \ell} \text{ch } k x - \text{ch } k x_1 =$$

$$= \frac{\text{ch } 4,96 x}{41,29} - \text{ch } 4,96 x_1 \quad \text{para } 0,75 \leq x \leq 1,50$$

Da Tabela 1, nº 9, Bibliografia | ⁵ | retiramos a expressão de T_{ω_1} para o 1º vão:



$$-T_{\omega_1} = k \frac{\text{ch } k \zeta'}{\text{sh } kl} \text{ch } kx = 4,96 \frac{\text{ch } 0}{\text{sh } 4,96 \times 1,50} \text{ch } 4,96 x = \frac{\text{ch } 4,96 x}{171,65}$$

para $0 \leq x \leq 0,75$

$$T_{\omega} = \frac{\text{ch } 4,96 x}{41,29} - 0,0553 \frac{\text{ch } 4,96 x}{171,65} = \frac{\text{ch } 4,96 x}{41,85}$$

para $0,75 \leq x \leq 1,50$

$$T_{\omega} = \frac{\text{ch } 4,96 x}{41,29} - \text{ch } 4,96 x_1 - 0,0553 \frac{\text{ch } 4,96 x}{171,65} =$$

$$= \frac{\text{ch } 4,96 x}{41,85} - \text{ch } 4,96 x_1$$

Quadro de valores de T_{ω} para o 1º vão:

Seção	x	x_1	T_ω
0	0,00	-	-0,0239
1	0,15	-	-0,0308
2	0,30	-	-0,0556
3	0,45	-	-0,1126
4	0,60	-	-0,2349
5 ^e	0,75	-	-0,4933
5 ^d	0,75	0	+0,5067
6	0,90	0,15	+0,2522
7	1,05	0,30	+0,1438
8	1,20	0,45	+0,1188
9	1,35	0,60	+0,1627
10 ^e	1,50	0,75	+0,3008

2º vão:

$$T_\omega = 0$$

Obtemos a expressão de T_{ω_1} pela Tabela 1, nº 9,

Bibliografia | ⁵ |:

$$\begin{aligned}
 T_{\omega_1} &= - \left[k \frac{\text{ch } k \zeta'}{\text{sh } k \ell} \text{ch } k x - k \text{sh } k x \right] \\
 &= - \left[4,96 \frac{\text{ch } (4,96 \times 1,50)}{\text{sh } (4,96 \times 1,50)} \text{ch } 4,96 x - 4,96 \text{sh } 4,96 x \right] \\
 &= - (4,96 \text{ch } 4,96 x - 4,96 \text{sh } 4,96 x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\omega_1} X_1 &= 0,0553 (4,96 \text{ch } 4,96 x - 4,96 \text{sh } 4,96 x) = \\
 &= 0,27 (\text{ch } 4,96 x - \text{sh } 4,96 x)
 \end{aligned}$$

Quadro de valores de T_{ω} para o 2º vão:

Seção	x	T_{ω}
10 ^d	0	-0,2743
11	0,15	-0,1303
12	0,30	-0,0619
13	0,45	-0,0294
14	0,60	-0,0140
15	0,75	-0,0066
16	0,90	-0,0032
17	1,05	-0,0015
18	1,20	-0,0007
19	1,35	-0,0003
20	1,50	-0,0002

Diagrama de T_{ω}

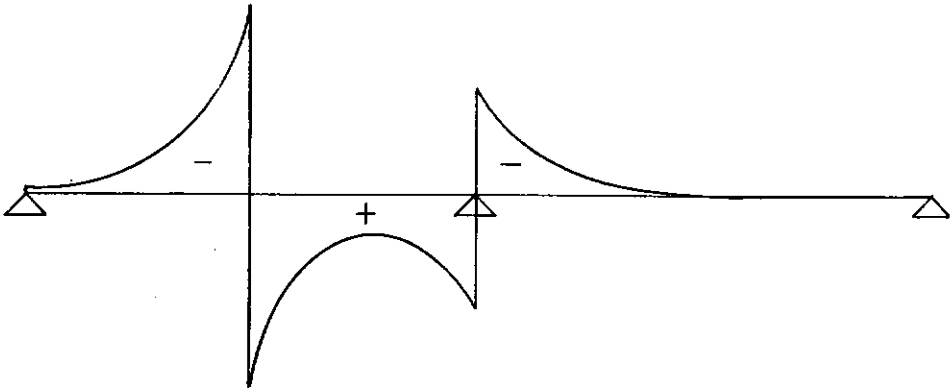


Figura III.13

$$T = T_V + T_{\omega}$$

Seção	T_V	T_{ω}	T
0	-0,4361	-0,0239	-0,4600
1	-0,4292	-0,0308	-0,4600
2	-0,4044	-0,0556	-0,4600
3	-0,3474	-0,1126	-0,4600
4	-0,2251	-0,2349	-0,4600
5 ^e	+0,0333	-0,4933	-0,4600
5 ^d	+0,0333	+0,5067	+0,5400
6	+0,2878	+0,2522	+0,5400
7	+0,3962	+0,1438	+0,5400
8	+0,4212	+0,1188	+0,5400
9	+0,3773	+0,1627	+0,5400
10 ^e	+0,2392	+0,3008	+0,5400
10 ^d	+0,2330	-0,2743	-0,0413
11	+0,0913	-0,1303	-0,0390
12	+0,0239	-0,0619	-0,0380
13	-0,0081	-0,0294	-0,0375
14	-0,0233	-0,0140	-0,0373
15	-0,0305	-0,0066	-0,0371
16	-0,0339	-0,0032	-0,0371
17	-0,0356	-0,0015	-0,0371
18	-0,0363	-0,0007	-0,0370
19	-0,0367	-0,0003	-0,0370
20	-0,0369	-0,0002	-0,0371

III.4 - MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

Faremos uma analogia com o Processo de Cross para determinação dos momentos fletores nos nós de uma estrutura hiperestática.

Da Hiperestática corrente temos o seguinte roteiro para o cálculo de estruturas pelo Processo de Cross.

- 1) Calculam-se os coeficientes de distribuição de momentos em torno de cada nó rígido interno da estrutura.

O coeficiente de distribuição d_i é calculado pela expressão

$$d_i = \frac{k_i}{\sum k_i}$$

sendo k_i a rigidez da barra i no nó em questão.

e

$\sum k_i$ a soma dos valores das rigidezas das barras concorrentes no nó em questão

- 2) Calculam-se os momentos de engastamento perfeito no Sistema Principal

O Sistema Principal é obtido bloqueando-se as rotações de todos os nós internos rígidos da estrutura.

- 3) Libera-se, uma de cada vez, a rotação de cada nó interno, equilibrando-se a carga-momento, que nele passa então a atuar, por momentos de sinais opostos ao desta carga - momento cujos módulos são dados por:

$$M_i = d_i M$$

Os momentos equilibrantes surgidos serão propagados aos nós opostos de cada barra, multiplicados pelos coeficientes de transmissão de momentos.

O nó equilibrado torna a ser bloqueado e passa-se ao equilíbrio dos outros nós.

Quanto os momentos equilibrantes propagarem momentos de valor desprezível a estrutura pode ser considerada equilibrada.

- 4) Obtêm-se os momentos finais de cada nó pela soma dos momentos de engastamento perfeito com aqueles surgidos pelo equilíbrio dos nós.

Baseando-se nesta teoria, teremos as seguintes definições:

1.^a) Rigidez ao empenamento χ :

É o valor do bimomento que, aplicado em um nó da barra suposto livre para girar, provoca uma rotação específica unitária neste nó estando o outro nó totalmente engastado

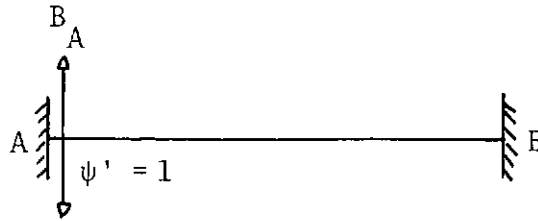


Figura III.14

A seção transversal em A apresenta rotação específica unitária.

O empenamento u tem para expressão

$$u = -\psi' \omega \quad \text{mas,} \quad \psi' = 1$$

sendo

$$\psi' = \frac{d\psi}{dx}$$

rotação específica ou deslocamento angular da barra,

$$\text{então} \quad u = -\omega$$

Portanto, uma rotação específica unitária significa que a seção transversal está sujeita a deslocamentos longitudinais (empenamento) que podem ser representados pelo diagrama das coordenadas setoriais com o sinal trocado.

$$\text{neste caso:} \quad B_A = \chi$$

2.^a) Bimomento Propagado B_B

É o bimomento que surge no engaste B devido à rotação específica unitária aplicada no nó A.

3.^a) Coefficiente de Transmissão

É o quociente entre o bimomento propagado e a rigidez ao empenamento

$$C = - \frac{B_B}{\chi}$$

o sinal negativo indica que o bimomento propagado tem sinal oposto ao do bimomento introduzido no nó A.

4.^a) Coefficiente de Distribuição λ num nó

É o quociente entre a rigidez de cada barra e a soma das rigidezes das barras concorrentes neste nó.

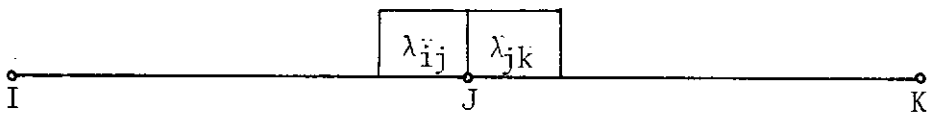


Figura III.15

$$\lambda_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{ij} + x_{jk}} \qquad \lambda_{jk} = \frac{x_{jk}}{x_{ij} + x_{jk}}$$

CONVENÇÃO DE SINAIS

O sinal dos esforços internos (bimomentos) do lado direito de cada barra deverá ser trocado, para que a equação de equilíbrio no nó seja satisfeita, isto é:

$$B_J^{\text{ext}} + B_J^{\text{dir}} = 0$$

ROTEIRO DO PROCESSO

- 1) Calculam-se a rigidez ao empenamento χ de cada barra, (conforme veremos a seguir), o fator de propagação c de cada barra e o fator de distribuição λ de cada nó da estrutura.

- 2) Os apoios intermediários da estrutura são considerados engastes perfeitos. Calculam-se para cada vão os bimomentos nos engastes devidos ao carregamento aplicado observando-se a convenção de sinais. Para o cálculo dos bimomentos nos engastes podem ser utilizadas as Tabelas Nº 1 da Bibliografia | ⁵ |;
- 3) Cada nó é liberado então para empenar-se. Faz-se o equilíbrio dos nós através dos coeficientes de distribuição λ pela expressão

$$B_i = \lambda_i B$$

- 4) O empenamento dos nós ocasiona a propagação de bimomentos através do coeficiente de transmissão C.
- 5) Os nós desequilibrados são novamente equilibrados.
- 6) Torna-se a propagar os bimomentos

Repetem-se os estágios 5 e 6 até que os bimomentos a serem propagados sejam desprezíveis.

- 7) Faz-se a soma dos bimomentos em cada nó.

DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ AO EMPENAMENTO
 χ E DO COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO C

1) Barra Bi-engastada

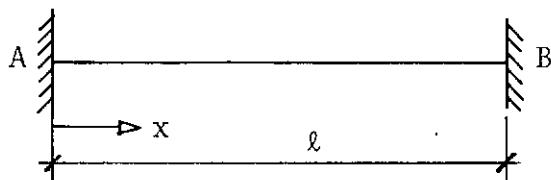


Figura III.16

As condições de bordo são:

No apoio A a rotação é nula e a rotação específica é unitária pela própria definição de χ .

No apoio B tanto a rotação como o empenamento são nulos.

Então,

quando $x = 0$, $\psi(0) = 0$ e $\psi'(0) = 1$

$x = l$, $\psi(l) = 0$ e $\psi'(l) = 0$

A solução da equação tem a forma:

$$\psi = C_1 + C_2 x + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx$$

conforme vimos no Capítulo II item II.7.

A derivada primeira do ângulo será:

$$\psi' = C_2 + k C_3 \operatorname{sh} k_x + k C_4 \operatorname{ch} kx$$

Substituindo os valores dados pelas condições de bordo, teremos 4 equações com 4 incógnitas:

$$0 = C_1 + C_3 \quad \therefore \quad C_1 = -C_3 \quad (1)$$

$$1 = C_2 + k C_4 \quad \therefore \quad C_2 = 1 - k C_4 \quad (2)$$

$$0 = C_1 + C_2 \ell + C_3 \operatorname{ch} k\ell + C_4 \operatorname{sh} k\ell \quad (3)$$

$$0 = C_2 + k C_3 \operatorname{sh} k\ell + k C_4 \operatorname{ch} k\ell \quad (4)$$

Substituindo (1) e (2) em (3) e (4) vem:

$$0 = -C_3 + (1 - k C_4) \ell + C_3 \operatorname{ch} k\ell + C_4 \operatorname{sh} k\ell$$

$$0 = 1 - k C_4 + k C_3 \operatorname{sh} k\ell + k C_4 \operatorname{ch} k\ell$$

reagrupando vem:

$$0 = \ell + C_3 (\operatorname{ch} k\ell - 1) + C_4 (\operatorname{sh} k\ell - k\ell)$$

$$0 = 1 + C_3 k \operatorname{sh} k\ell + C_4 k (\operatorname{ch} k\ell - 1)$$

Destas duas equações tiramos os valores de C_3 e C_4 .

$$C_3 = \frac{1}{k} \frac{k\ell (\operatorname{ch} k\ell - 1) - (\operatorname{sh} k\ell - k\ell)}{2 (\operatorname{ch} k\ell - 1) - k\ell \operatorname{sh} k\ell}$$

$$C_4 = \frac{1}{k} \frac{(\operatorname{ch} k\ell - 1) - k\ell \operatorname{sh} k\ell}{2 (\operatorname{ch} k\ell - 1) - k\ell \operatorname{sh} k\ell}$$

Nosso objetivo é saber o valor do bimomento no apoio A porque

$$\chi = B_A$$

A expressão do Bimomento é:

$$B = -E I_{\omega} \psi''$$

e

$$\psi'' = k^2 C_3 \operatorname{ch} kx + k^2 C_4 \operatorname{sh} kx$$

Substituindo os valores de C_3 e C_4 chegaremos a:

$$B = \frac{E I_{\omega}}{\ell} \frac{k\ell}{k\ell \operatorname{sh} k\ell - 2(\operatorname{ch} k\ell - 1)} \left| (k\ell \operatorname{ch} k\ell - \operatorname{sh} k\ell) \operatorname{ch} kx + \right. \\ \left. + (\operatorname{ch} k\ell - 1 - k \operatorname{sh} k\ell) \operatorname{sh} kx \right|$$

no apoio A teremos:

$$B_A = \chi_{AB} = \frac{E I_\omega}{\ell} \frac{k\ell (k\ell \operatorname{ch} k\ell - \operatorname{sh} k\ell)}{k\ell \operatorname{sh} k\ell - 2(\operatorname{ch} k\ell - 1)}$$

O Bimomento no apoio B será:

$$B_B = \frac{E I_\omega}{\ell} \frac{k\ell (k\ell - \operatorname{sh} k\ell)}{k\ell \operatorname{sh} k\ell - 2(\operatorname{ch} k\ell - 1)}$$

O coeficiente de transmissão C por definição, é

$$C = \frac{-B_B}{\chi} = - \frac{B_B}{B_A}$$

Substituindo, vem:

$$C_{AB} = \frac{\operatorname{sh} k\ell - k\ell}{k\ell \operatorname{ch} k\ell - \operatorname{sh} k\ell}$$

2) Barra Monoengastada

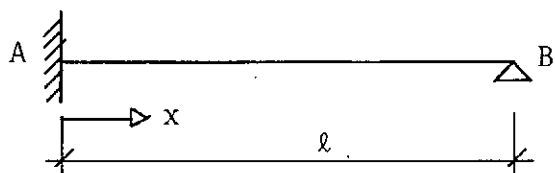


Figura III.17

Para esta estrutura as condições de bordo são:

. No apoio A, rotação nula e rotação específica unitária.

. No apoio B, rotação e bimomento nulos.

Então,

$$\text{quando } x = 0, \quad \psi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi'(0) = 1$$

$$\text{quando } x = \ell, \quad \psi(\ell) = 0 \quad \text{e} \quad \psi''(\ell) = 0$$

Já sabemos que são válidas as seguintes equações:

$$\psi = C_1 + C_2 x + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx$$

$$\psi' = C_2 + k C_3 \operatorname{sh} kx + k C_4 \operatorname{ch} kx$$

$$\psi'' = k^2 C_3 \operatorname{ch} kx + k^2 C_4 \operatorname{sh} kx$$

Substituindo os valores fornecidos pelas condições de bordo, teremos:

$$0 = C_1 + C_3 \quad \therefore \quad C_1 = -C_3 \quad (1)$$

$$1 = C_2 + k C_4 \quad \therefore \quad C_2 = 1 - k C_4 \quad (2)$$

$$0 = C_1 + C_2 \ell + C_3 \operatorname{ch} k\ell + C_4 \operatorname{sh} k\ell \quad (3)$$

$$0 = k^2 C_3 \operatorname{ch} k\ell + k^2 C_4 \operatorname{sh} k\ell \quad \therefore \quad C_3 = -C_4 \frac{\operatorname{sh} k\ell}{\operatorname{ch} k\ell} \quad (4)$$

Substituindo (1), (2) e (4) em (3) obteremos o valor de C_4 :

$$C_4 = \frac{\ell \operatorname{ch} k\ell}{k\ell \operatorname{ch} k\ell - \operatorname{sh} k\ell}$$

Substituindo o valor de C_4 na equação (4) teremos:

$$C_3 = - \frac{\ell \operatorname{sh} k\ell}{k\ell \operatorname{ch} k\ell - \operatorname{sh} k\ell}$$

A derivada segunda do ângulo será:

$$\psi'' = \frac{k^2 \ell}{(k\ell \operatorname{ch} k\ell - \operatorname{sh} k\ell)} (-\operatorname{sh} k\ell \operatorname{ch} kx + \operatorname{ch} k\ell \operatorname{sh} kx)$$

A expressão do bimomento torna-se:

$$B = \frac{E I_\omega}{\ell} \frac{(k\ell)^2}{k\ell \operatorname{ch} k\ell - \operatorname{sh} k\ell} (\operatorname{sh} k\ell \operatorname{ch} kx - \operatorname{ch} k\ell \operatorname{sh} kx)$$

Os bimomentos nos apoios serão:

$$B_A = X_{AB} = \frac{E I_\omega}{\ell} \frac{(k\ell)^2 \operatorname{sh} k\ell}{k\ell \operatorname{ch} k\ell - \operatorname{sh} k\ell}$$

$$B_B = 0$$

$$C_{AB} = 0$$

3) Barra em balanço

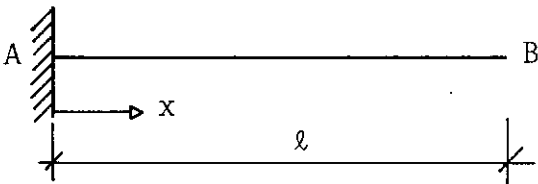


Figura III.18

As condições de bordo são:

- . No apoio A, rotação nula e rotação específica unitária;
- . Na extremidade B, bimomento e momento torçor total nulos.

Então,

quando $x = 0$, $\psi(0) = 0$ e $\psi'(0) = 1$

quando $x = \ell$, $\psi''(\ell) = 0$ e $T(\ell) = 0$

mas,

$$T = E I_{\omega} (k^2 \psi' - \psi''')$$

então,

$$k^2 \psi'(\ell) - \psi'''(\ell) = 0$$

Temos as seguintes equações:

$$\psi = C_1 + C_2 x + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx$$

$$\psi' = C_2 + k C_3 \operatorname{sh} kx + k C_4 \operatorname{ch} kx$$

$$\psi'' = k^2 C_3 \operatorname{ch} kx + k^2 C_4 \operatorname{sh} kx$$

$$\psi''' = k^3 C_3 \operatorname{sh} kx + k^3 C_4 \operatorname{ch} kx$$

Substituindo os valores fornecidos pelas condições de bordo, teremos:

$$0 = C_1 + C_3 \quad \therefore \quad C_1 = -C_3 \quad (1)$$

$$1 = C_2 + k C_4 \quad \therefore \quad C_2 = 1 - k C_4 \quad (2)$$

$$0 = k^2 C_3 \operatorname{ch} k\ell + k^2 C_4 \operatorname{sh} k\ell \quad \therefore \quad C_3 = -C_4 \frac{\operatorname{sh} k\ell}{\operatorname{ch} k\ell} \quad (3)$$

$$k^2 (C_2 + k C_3 \operatorname{sh} k\ell + k C_4 \operatorname{ch} k\ell) = k^3 C_3 \operatorname{sh} k\ell + k^3 C_4 \operatorname{ch} k\ell \quad (4)$$

da equação (4) tiramos $C_2 = 0$.

$$\text{Substituindo } C_2 \text{ na equação (2) temos } C_4 = \frac{1}{k}$$

$$\text{Substituindo em (3)} \quad C_3 = -\frac{1}{k} \frac{\operatorname{sh} k\ell}{\operatorname{ch} k\ell}$$

Os valores de C_3 e C_4 nos dão a expressão de ψ''

$$\psi'' = -k \left(\frac{\operatorname{sh} k\ell}{\operatorname{ch} k\ell} \operatorname{ch} kx + \operatorname{sh} kx \right)$$

$$B = E I_{\omega} k \left(\frac{\operatorname{sh} k\ell}{\operatorname{ch} k\ell} \operatorname{ch} kx + \operatorname{sh} kx \right)$$

O Bimomento em A será:

$$B_A = \chi_{AB} = \frac{E I_{\omega}}{\ell} \frac{k\ell \operatorname{sh} k\ell}{\operatorname{ch} k\ell}$$


O coeficiente de transmissão será nulo porque

$$B_B = 0.$$

$$C_{AB} = 0$$

III.5 - EXEMPLO RESOLVIDO

Cálculo de uma viga contínua sobre três apoios pelo método dos deslocamentos (Processo de Cross).

Perfil  6" x 2" x 0,231 KN/m sujeito à ação de um momento torçor igual a 1m KN aplicado na seção do meio do 1º vão.

OBSERVAÇÃO:

Trata-se da mesma estrutura do item III.3.

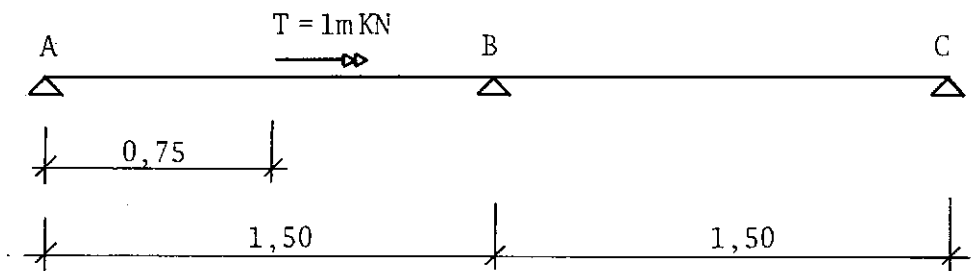


Figura III.19

1) Cálculo das rigidezas ao empenamento:

Barra AB: (monoengastada)

$$\begin{aligned}
 x_{AB} &= \frac{(k\ell)^2 \operatorname{sh} k\ell}{k\ell \operatorname{ch} k\ell - \operatorname{sh} k\ell} \cdot \frac{E I_{\omega}}{\ell} = \\
 &= \frac{(4,96 \times 1,50)^2 \operatorname{sh} 4,96 \times 1,50}{4,96 \times 1,50 \operatorname{ch} 4,96 \times 1,50 - \operatorname{sh} 4,96 \times 1,50} \cdot \frac{E I_{\omega}}{1,50} = 5,73 E I_{\omega}
 \end{aligned}$$

Barra BC:

$$x_{BC} = x_{AB}$$

2) Cálculo dos coeficientes de transmissão

Barra AB:

$$C = 0$$

Barra BC:

$$C = 0$$

3) Cálculo dos coeficientes de distribuição

$$\lambda_{BA} = \frac{x_{AB}}{x_{AB} + x_{BC}} = \frac{5,73}{5,73 + 5,73} = 0,5$$

4) Cálculo dos Bimomentos para barras perfeitamente engastadas

Barra AB

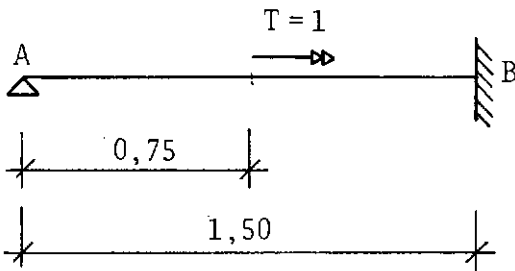


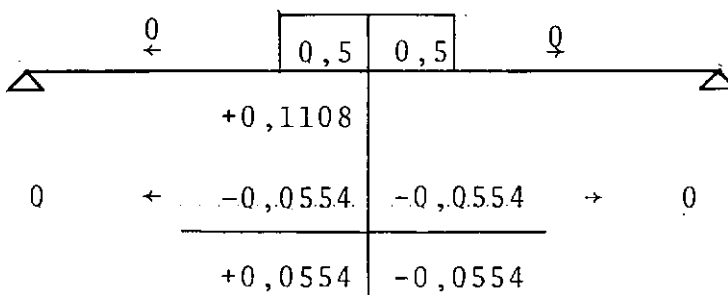
Figura III.20

pela Tabela 1, N° 4, | ⁵ |.

$$B_A = 0$$

$$B_B = B_0 = \left(\frac{1}{k} \frac{k\zeta' \operatorname{sh} k\ell - k\ell \operatorname{sh} k\zeta'}{\operatorname{sh} k\ell - k\ell \operatorname{ch} k\ell} \right) T$$

$$= -1 \left(\frac{1}{4,96} \frac{4,96 \times 0,75 \operatorname{sh} 4,96 \times 1,50 - 4,96 \times 1,50 \operatorname{sh} 4,96 \times 0,75}{\operatorname{sh} 4,96 \times 1,50 - 4,96 \times 1,50 \operatorname{ch} 4,96 \times 1,50} \right) = +0,1108$$

5) Equilíbrio do Nó

$$+ 0,1108 \times \lambda = 0,1108 \times 0,5 = 0,0554. \text{ O mesmo va-}$$

lor encontrado pelo método das forças.

Tendo-se encontrado o valor do hiperestático:

-0,0554 mKn, para se traçar o diagrama de bimomentos proce
de-se de forma análoga à do método das forças.

CAPÍTULO IV

LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA BIMOMENTOS

Estudaremos o traçado das linhas de influência nas vigas contínuas sujeitas a carga de momento torçor.

O processo é análogo ao traçado das linhas de influência nas vigas contínuas sujeitas a uma carga vertical em que os hiperestáticos são os momentos fletores. No nosso caso os hiperestáticos são os bimomentos.

IV.1 - LINHAS DE INFLUÊNCIA DOS HIPERESTÁTICOS

O primeiro passo é a determinação das linhas de influência dos hiperestáticos χ_i (bimomentos).

O processo baseia-se na matriz inversa, que exprime as incógnitas hiperestáticas em função dos termos de carga.

$$\chi_i = - \sum_{k=1}^n \beta_{ik} \delta_{k0}$$

sendo, conforme já vimos no Capítulo III,

$|\beta|$... matriz de rigidez da estrutura

$|\delta|$... matriz de flexibilidade da estrutura

$$|\beta| = |\delta|^{-1}$$

$\{\delta_0\}$... vetor dos termos de carga.

Os coeficientes δ_{k0} terão de ser calculados para um determinado número de posições do momento torçor unitário.

Roteiro para Determinação da L.I. para Bimomento para Viga Contínua sobre n Apoios

Conforme já dissemos, o roteiro é perfeitamente análogo ao da determinação das linhas de influência para momentos fletores.

1. Determinação do Sistema Principal;
2. Determinação dos Diagramas Auxiliares.

Traçam-se os diagramas para os hiperestáticos unitários $\chi_i^{n-1} = 1$ e os diagramas para as cargas atuando do primeiro até o enésimo vão M_0^k .

3. Determinação dos coeficientes δ_{ik} que formam a matriz $|\delta|$ que pode ser feita através das Tabelas 3 | 5 |.

4. Determinação da matriz inversa $|\beta| = |\delta|^{-1}$

5. Equações de compatibilidade

$$X_i = - \sum_{k=1}^n \beta_i \delta_{k0}$$

Em seguida calcularemos as linhas de influencia para vigas contínuas com 2, 3, 4 e 5 vãos.

LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA BIMOMENTO

Carga atuante: momento torçor.

1. Viga Contínua sobre 3(três) apoios:

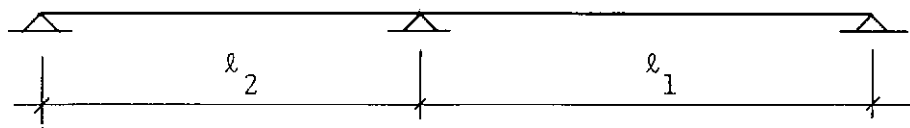


Figura IV.1

1.1 - Sistema Principal:

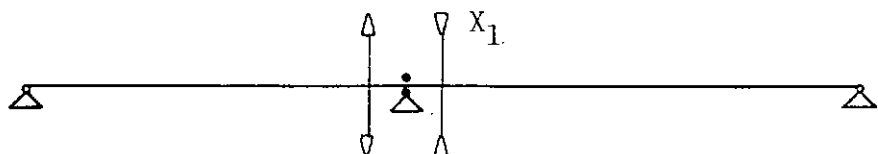


Figura IV.2

1.2 - Diagramas Auxiliares:

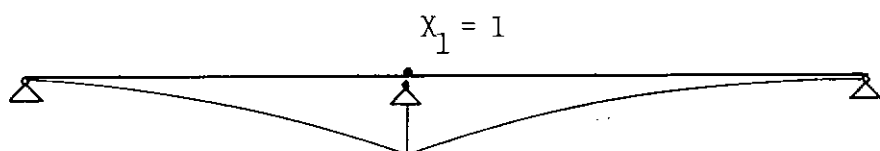


Figura IV.3

a carga atuando no 1º vão:

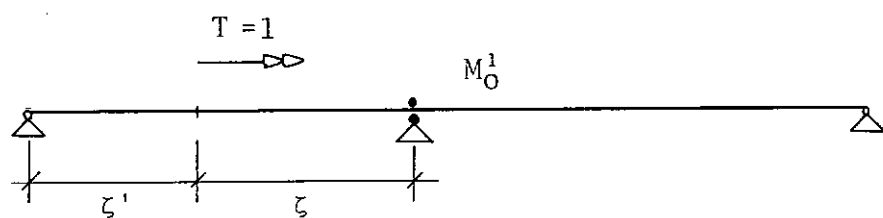


Figura IV.4

a carga atuando no 2º vão:

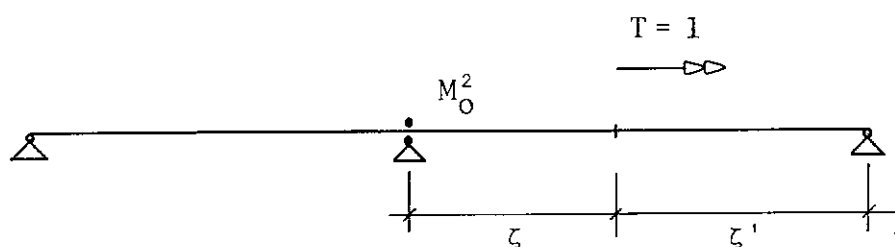


Figura IV.5

1.3 - Coeficientes:

Da Tabela 3, Nº 14, |⁵| temos que:

$$E I_{\omega} \delta_{11} = \int B \bar{B} dx = \chi' B \bar{B} \ell$$

$$\chi' = \frac{1}{k\ell} \left(\frac{1}{thk\ell} - \frac{1}{k\ell} \right) \quad k = \sqrt{\frac{G}{E} \frac{I_t}{I_{\omega}}}$$

$$E I_{\omega} \delta_{11} = \chi'_1 \ell_1 + \chi'_2 \ell_2$$

Da Tabela 3, N° 1, | 5 | temos que:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \frac{1}{k^2} \int T_v \overline{T_v} dx + \int B \overline{B} dx = \chi'_a T \overline{B} \ell^2$$

$$\chi'_a = \frac{1}{(k\ell)^2} \left(\frac{\zeta'}{\ell} - \frac{\text{sh } k\zeta'}{\text{sh } k\ell} \right)$$

como ζ' é variável, teremos diferentes valores para χ'_a .

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_{a_1} \ell_1^2 \quad \text{para o 1º vão}$$

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_{a_2} \ell_2^2 \quad \text{para o 2º vão}$$

1.4 - Equação de compatibilidade:

$$E I_{\omega} \delta_{11} X_1 + E I_{\omega} \delta_{10} = 0 \quad \therefore \quad X_1 = - \frac{E I_{\omega} \delta_{10}}{E I_{\omega} \delta_{11}}$$

Teremos uma expressão de X_1 para o 1º vão e outra para o 2º vão.

2) Viga Contínua sobre 4 apoios:

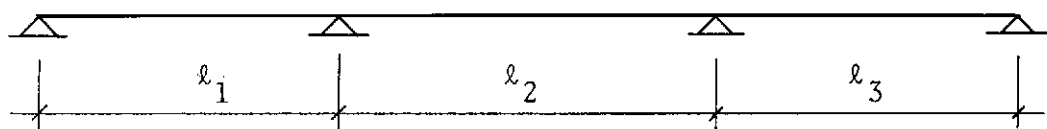


Figura IV.6

2.1 - Sistema Principal

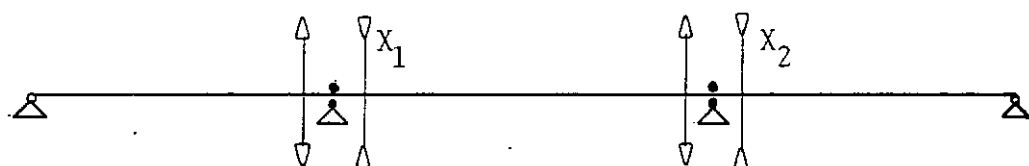


Figura IV.7

2.2 - Diagramas Auxiliares

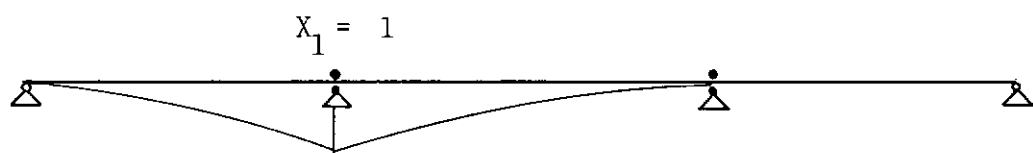


Figura IV.8

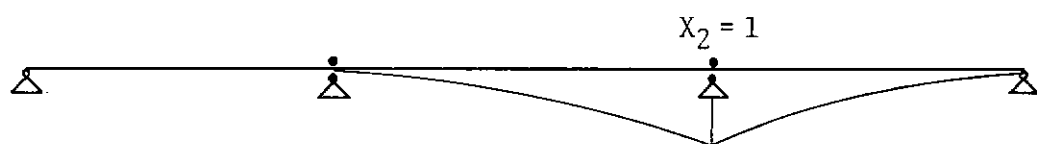


Figura IV.9

carga atuando no 1º vão:

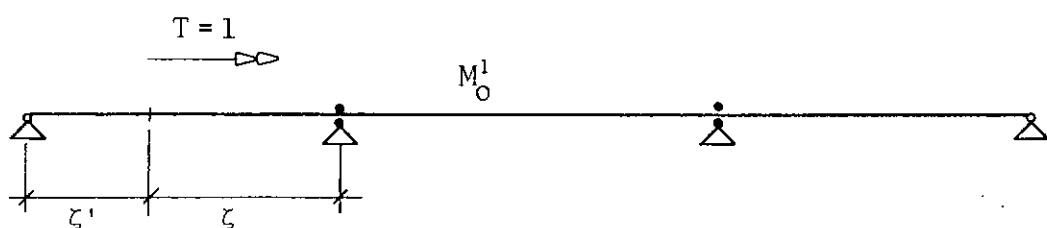


Figura IV.10

carga atuando no 2º vão:

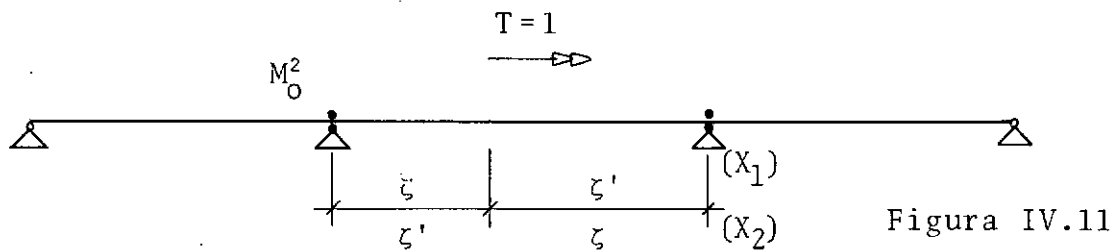


Figura IV.11

carga atuando no 3º vão:

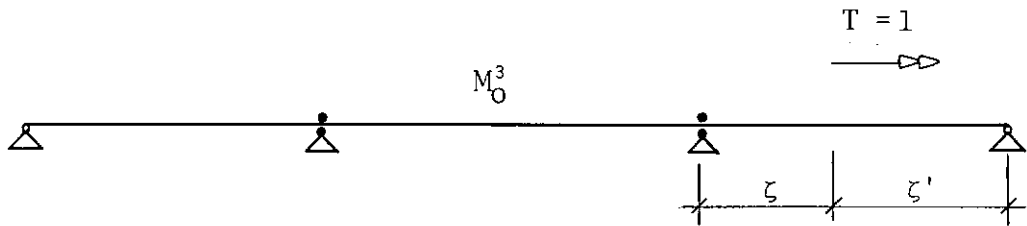


Figura IV.12

2.3 - Coeficientes

Da Tabela 3, nº 14, |⁵| temos que:

$$E I_{\omega} \delta_{11} = \int B \bar{B} dx = \chi' B \bar{B} \ell$$

$$\chi' = \frac{1}{k\ell} \left(\frac{1}{\text{th } k\ell} - \frac{1}{k\ell} \right) \quad k = \sqrt{\frac{G I_t}{E I_{\omega}}}$$

$$E I_{\omega} \delta_{11} = \chi'_1 \ell_1 + \chi'_2 \ell_2$$

$$E I_{\omega} \delta_{22} = \chi'_2 \ell_2 + \chi'_3 \ell_3$$

Da Tabela 3, n.º 15, | ⁵ | temos que:

$$E I_{\omega} \delta_{12} = \int B \bar{B} dx = \chi' B \bar{B} \ell$$

$$\chi' = \frac{1}{k \ell} \left(\frac{1}{k \ell} - \frac{1}{\text{sh } k \ell} \right)$$

$$E I_{\omega} \delta_{12} = \bar{\chi}'_2 \ell_2$$

Da Tabela 3, n.º 1, | ⁵ | temos:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \frac{1}{k^2} \int T_V \bar{T}_V dx + \int B \bar{B} dx = \chi'_a T \bar{B} \ell^2$$

$$\chi'_a = \frac{1}{(k \ell)^2} \left(\frac{\zeta'}{\ell} - \frac{\text{sh } k \zeta'}{\text{sh } k \ell} \right)$$

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_{a_1} \ell_1^2 \text{ no 1.º vão.}$$

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_{a_2} \ell_2^2 \text{ no 2.º vão.}$$

$$E I_{\omega} \delta_{10} = 0 \text{ no 3.º vão.}$$

$$E I_{\omega} \delta_{20} = 0 \text{ no 1.º vão.}$$

$$E I_{\omega} \delta_{20} = \bar{\chi}'_{a_2} \ell_2^2 \text{ no 2.º vão.}$$

$$E I_{\omega} \delta_{20} = \chi'_{a_3} \ell^2_3 \quad \text{no 3º vão.}$$

Observe-se que os valores de χ'_a são variáveis com ζ' .

2.4 - Equações de compatibilidade:

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 = -\delta_{10}$$

$$\delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 = -\delta_{20}$$

ou, em linguagem matricial:

$$[\delta] \{X\} = -\{\delta_0\}$$

também podemos escrever que:

$$\{X\} = -[\delta]^{-1} \{\delta_0\}$$

o vetor das incógnitas será:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

a matriz de flexibilidade $[\delta]$ será:

$$\begin{vmatrix} x'_1 \ell_1 + x'_2 \ell_2 & \bar{x}'_2 \ell_2 \\ \bar{x}'_2 \ell_2 & x'_2 \ell_2 + x'_3 \ell_3 \end{vmatrix}$$

a matriz de rigidez $|B|$ será o inverso da matriz acima.

Finalmente, os vetores dos termos de carga serão diferentes para cada vão da estrutura.

Atuando a carga no 1º vão o vetor será:

$$\begin{Bmatrix} x'_{a_1} \ell_1^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

no 2º vão teremos:

$$\begin{Bmatrix} x'_{a_2} \ell_2^2 \\ \bar{x}'_{a_2} \ell_2^2 \end{Bmatrix}$$

no 3º vão:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ x'_{a_3} \ell_3^2 \end{Bmatrix}$$

3) Viga Contínua sobre 5(cinco) apoios:

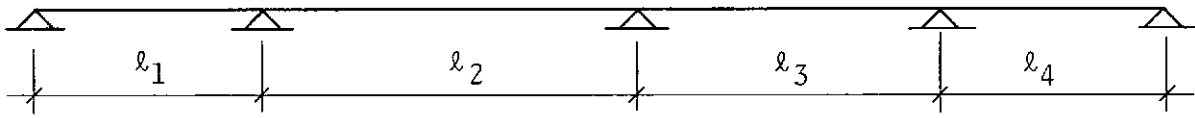


Figura IV.13

3.1 - Sistema Principal

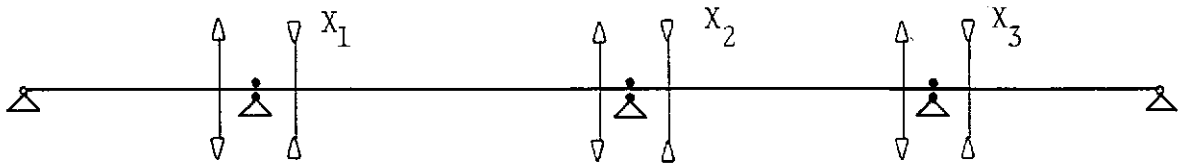
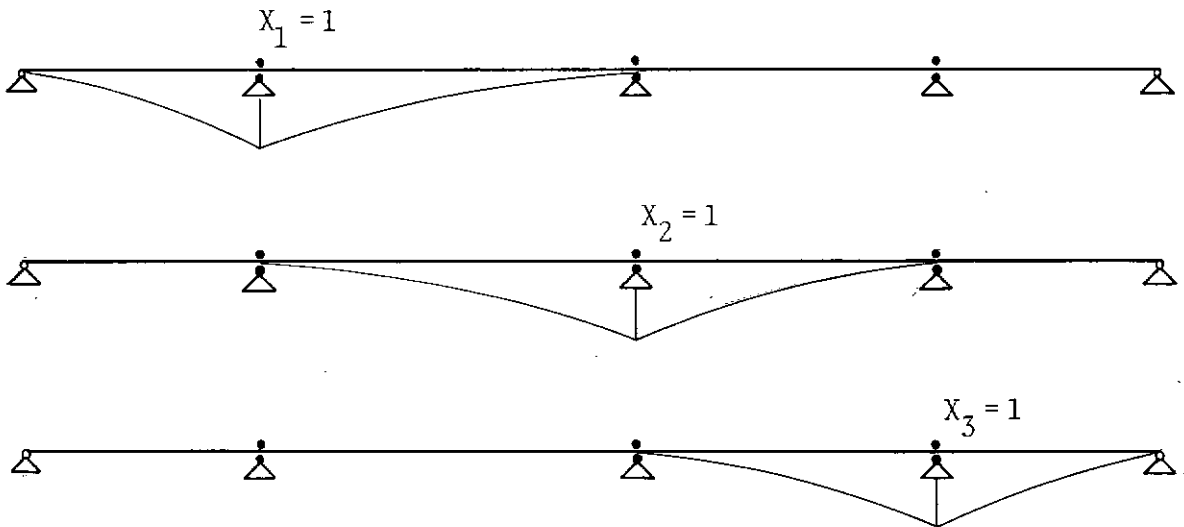


Figura IV.14

3.2 - Diagramas Auxiliares:



Figuras: IV.15, IV.16. e IV.17

carga atuando no 1º vão:

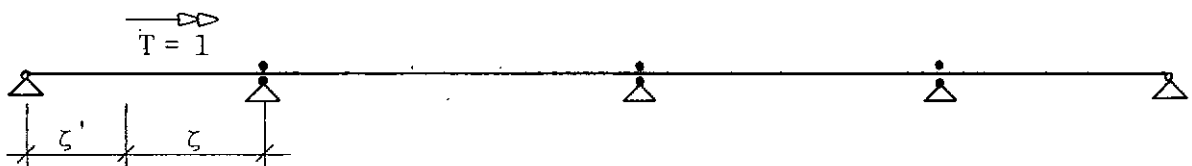


Figura IV.18

Carga atuando no 2º vão:

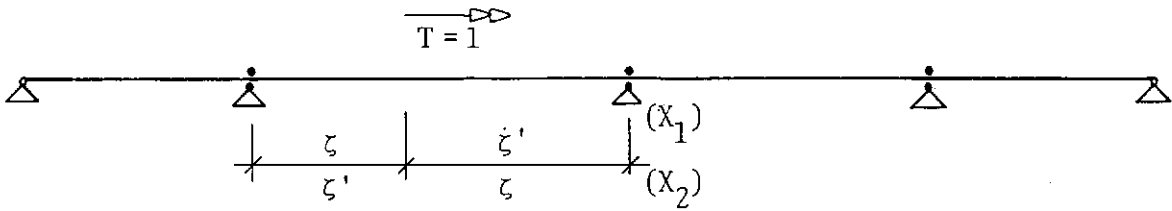


Figura IV.19

Carga atuando no 3º vão:

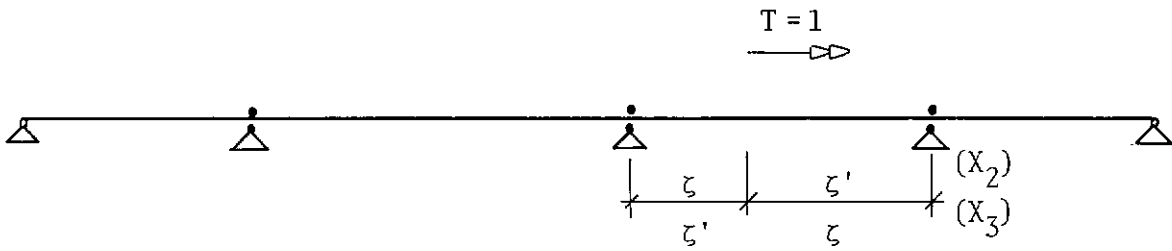


Figura IV.20

Carga atuando no 4º vão:

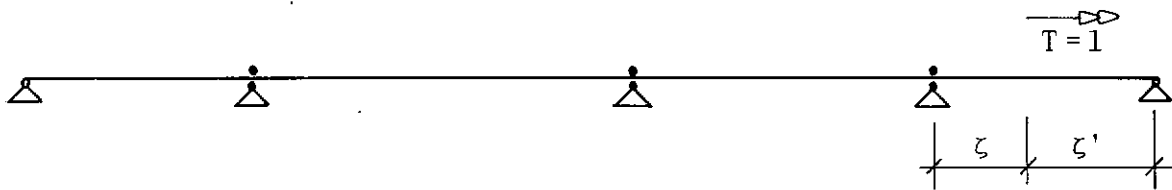


Figura IV.21

3.3 - Coeficientes

Da Tabela 3, nº 14, |⁵| já vimos que:

$$E I_{\omega} \delta_{11} = \chi' B \bar{B} \ell$$

sendo

$$\chi' = \frac{1}{k\ell} \left(\frac{1}{\text{th } k\ell} - \frac{1}{k\ell} \right) \quad \therefore \quad k = \sqrt{\frac{G I_t}{E I_{\omega}}}$$

Então teremos:

$$E I_{\omega} \delta_{11} = \chi'_1 \ell_1 + \chi'_2 \ell_2$$

$$E I_{\omega} \delta_{22} = \chi'_2 \ell_2 + \chi'_3 \ell_3$$

$$E I_{\omega} \delta_{33} = \chi'_3 \ell_3 + \chi'_4 \ell_4$$

Da Tabela 3, nº 15, | ⁵ | já vimos que:

$$E I_{\omega} \delta_{12} = \chi' B \bar{B} \ell$$

sendo

$$\chi' = \frac{1}{k\ell} \left(\frac{1}{k\ell} - \frac{1}{sh k\ell} \right)$$

então teremos:

$$E I_{\omega} \delta_{12} = \bar{\chi}'_2 \ell_2$$

$$E I_{\omega} \delta_{13} = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{23} = \bar{\chi}'_3 \ell_3$$

Da Tabela 3, nº 1, | ⁵ | já vimos que:

$$E I_{\omega} \sigma_{10} = \chi'_a T B \ell^2$$

sendo

$$\chi'_a = \frac{1}{(k\ell)^2} \left(\frac{\zeta'}{\ell} - \frac{\operatorname{sh} k\zeta'}{\operatorname{sh} k\ell} \right)$$

para o 1º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_{a_1} \ell_1^2$$

para o 2º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_{a_2} \ell_2^2$$

para o 3º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = 0$$

para o 4º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = 0$$

para o 1º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{20} = 0$$

para o 2º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{20} = \bar{\chi}'_{a_2} \ell_2^2$$

para o 3º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{20} = \chi'_{a_3} \ell_3^3$$

para o 4º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{20} = 0$$

para o 1º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{30} = 0$$

para o 2º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{30} = 0$$

para o 3º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{30} = \bar{\chi}'_{a_3} \ell_3^2$$

para o 4º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{30} = \chi'_{a_4} \ell_4^2$$

3.4 - Equações de Compatibilidade

Para o 1º vão:

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 l_1 + x'_2 l_2 & \bar{x}'_2 l_2 & 0 \\ \bar{x}'_2 l_2 & x'_2 l_2 + x'_3 l_3 & \bar{x}'_3 l_3 \\ 0 & \bar{x}'_3 l_3 & x'_3 l_3 + x'_4 l_4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} x'_{a_1} l_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Para o 2º vão:

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 l_1 + x'_2 l_2 & \bar{x}'_2 l_2 & 0 \\ \bar{x}'_2 l_2 & x'_2 l_2 + x'_3 l_3 & \bar{x}'_3 l_3 \\ 0 & \bar{x}'_3 l_3 & x'_3 l_3 + x'_4 l_4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} x'_{a_2} l_2^2 \\ \bar{x}'_{a_2} l_2^2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Para o 3º vão:

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 l_1 + x'_2 l_2 & \bar{x}'_2 l_2 & 0 \\ \bar{x}'_2 l_2 & x'_2 l_2 + x'_3 l_3 & \bar{x}'_3 l_3 \\ 0 & \bar{x}'_3 l_3 & x'_3 l_3 + x'_4 l_4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ x'_{a_3} l_3^2 \\ \bar{x}'_{a_3} l_3^2 \end{vmatrix}$$

Para o 4º vão:

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 l_1 + x'_2 l_2 & \bar{x}'_2 l_2 & 0 \\ \bar{x}'_2 l_2 & x'_2 l_2 + x'_3 l_3 & \bar{x}'_3 l_3 \\ 0 & \bar{x}'_3 l_3 & x'_3 l_3 + x'_4 l_4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ x'_4 l_4^2 \end{vmatrix}$$

4. Viga Contínua Sobre 6(seis) Apoios:

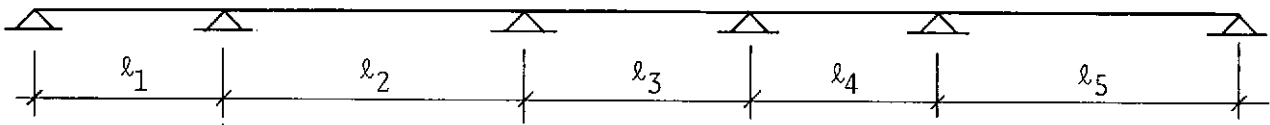


Figura IV.22

4.1 - Sistema Principal

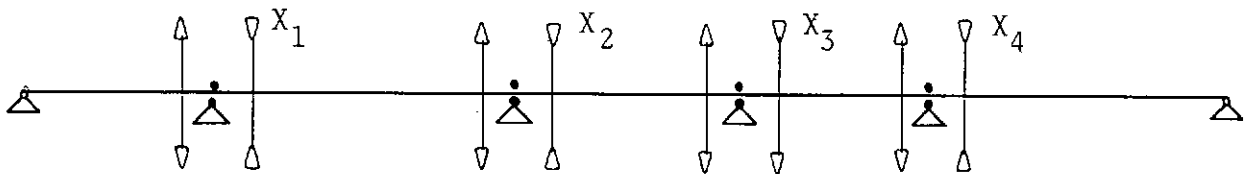


Figura IV.23

4.2 - Diagramas Auxiliares

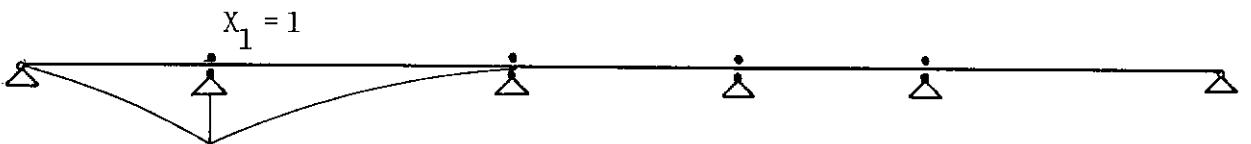
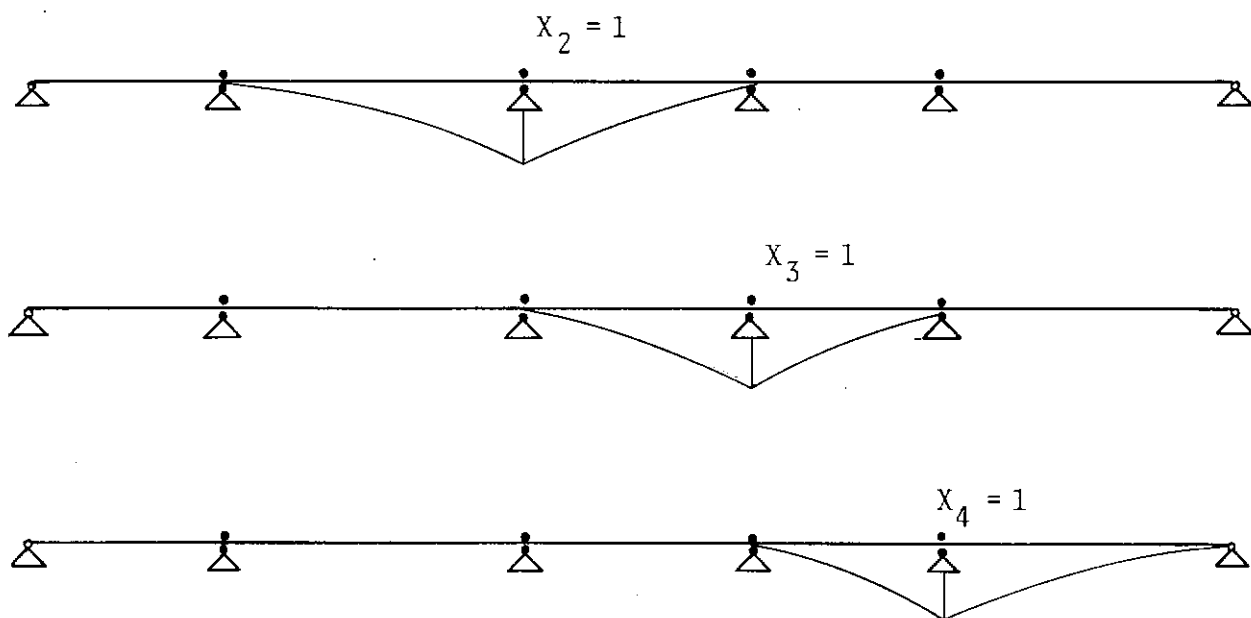


Figura IV.24



Figuras IV.25, IV.26 e IV.27

Carga atuando no 1º vão:

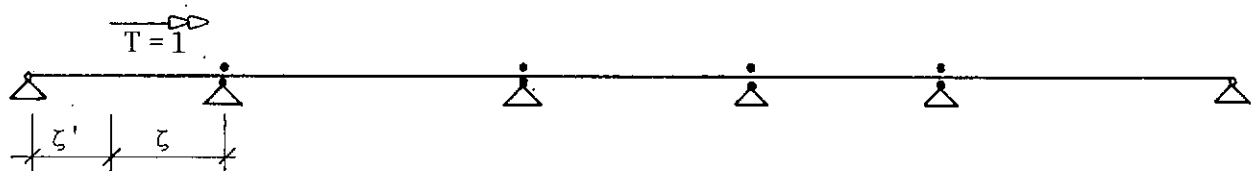


Figura IV.28

Carga atuando no 2º vão:

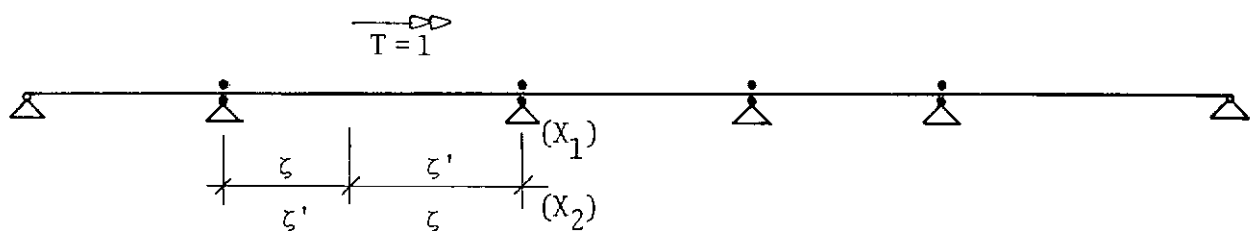


Figura IV.29

Carga atuando no 3º vão:

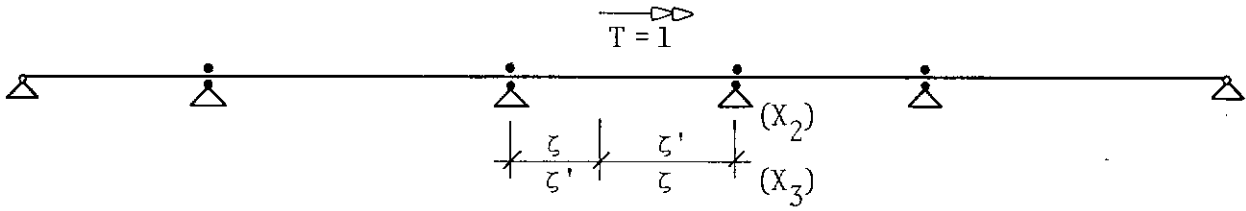


Figura IV.30

Carga atuando no 4º vão:

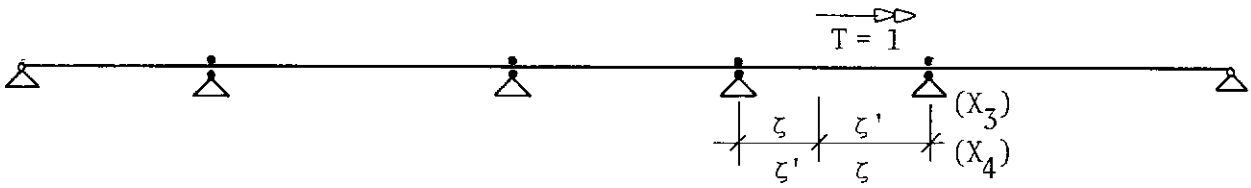


Figura IV.31

Carga atuando no 5º vão:

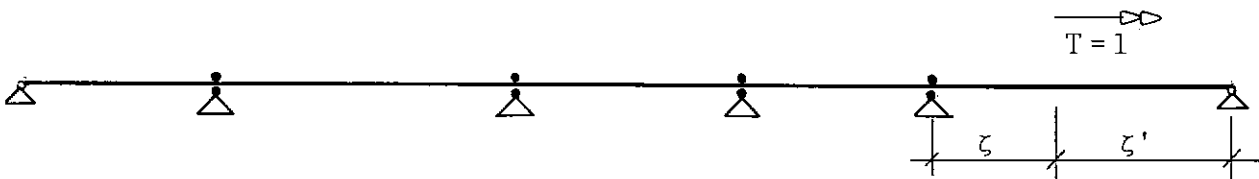


Figura IV.32

4.3 - Coeficientes

Da Tabela 3, nº 14, [5]

$$E I_{\omega} \delta_{11} = \chi' B \bar{B} l$$

sendo

$$\chi' = \frac{1}{k\ell} \left(\frac{1}{\text{th } k\ell} - \frac{1}{k\ell} \right), \quad k = \sqrt{\frac{G I_t}{E I_\omega}}$$

então teremos:

$$E I_\omega \delta_{11} = \chi'_1 \ell_1 + \chi'_2 \ell_2$$

$$E I_\omega \delta_{22} = \chi'_2 \ell_2 + \chi'_3 \ell_3$$

$$E I_\omega \delta_{33} = \chi'_3 \ell_3 + \chi'_4 \ell_4$$

$$E I_\omega \delta_{44} = \chi'_4 \ell_4 + \chi'_5 \ell_5$$

Da Tabela 3, nº 15, |⁵| já vimos que:

$$E I_\omega \delta_{12} = \chi'_1 B \bar{B} \ell$$

sendo

$$\chi' = \frac{1}{k\ell} \left(\frac{1}{k\ell} - \frac{1}{\text{sh } k\ell} \right)$$

então teremos:

$$E I_\omega \delta_{12} = \chi'_2 \ell_2$$

$$E I_\omega \delta_{13} = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{14} = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{23} = \bar{\chi}'_3 \ell_3$$

$$E I_{\omega} \delta_{24} = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{34} = \bar{\chi}'_4 \ell_4$$

Da Tabela 3, nº 1, |⁵| já sabemos que:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_a T \bar{B} \ell^2$$

sendo

$$\chi'_a = \frac{I}{(k\ell)^2} \left[\frac{\zeta'}{\ell} - \frac{\text{sh } k \zeta'}{\text{sh } k\ell} \right]$$

então teremos:

para o 1º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_{a_1} \ell_1^2$$

para o 2º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_{a_2} \ell_2^2$$

para o 3º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = 0$$

para o 4º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = 0$$

para o 5º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = 0$$

para o 1º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{20} = 0$$

para o 2º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{20} = \overline{\chi}_{a_2}' l_2^2$$

para o 3º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{20} = \chi_{a_3}' l_3^2$$

para o 4º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{20} = 0$$

para o 5º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{20} = 0$$

para o 1º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{30} = 0$$

para o 2º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{30} = 0$$

para o 3º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{30} = \overline{\chi}_{a_3}' \ell_3^2$$

para o 4º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{30} = \chi_{a_4}' \ell_4^2$$

para o 5º vão;

$$E I_{\omega} \delta_{30} = 0$$

para o 1º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{40} = 0$$

para o 2º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{40} = 0$$

para o 3º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{40} = 0$$

para o 4º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{40} = \overline{\chi}'_{a_4} \ell_4^2$$

para o 5º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{40} = \chi'_{a_5} \ell_5^2$$

4.4- Equações de Compatibilidade

para o 1º vão:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 l_1 + x'_2 l_2 & \bar{x}'_2 l_2 & 0 & 0 \\ \bar{x}'_2 l_2 & x'_2 l_2 + x'_3 l_3 & \bar{x}'_3 l_3 & 0 \\ 0 & \bar{x}'_3 l_3 & x'_3 l_3 + x'_4 l_4 & \bar{x}'_4 l_4 \\ 0 & 0 & \bar{x}'_4 l_4 & x'_4 l_4 + x'_5 l_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x'_{a_1} l_1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

para o 2º vão:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 l_1 + x'_2 l_2 & \bar{x}'_2 l_2 & 0 & 0 \\ \bar{x}'_2 l_2 & x'_2 l_2 + x'_3 l_3 & \bar{x}'_3 l_3 & 0 \\ 0 & \bar{x}'_3 l_3 & x'_3 l_3 + x'_4 l_4 & \bar{x}'_4 l_4 \\ 0 & 0 & \bar{x}'_4 l_4 & x'_4 l_4 + x'_5 l_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x'_{a_2} l_2^2 \\ \bar{x}'_{a_2} l_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

para o 3º vão:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 l_1 + x'_2 l_2 & \bar{x}'_2 l_2 & 0 & 0 \\ \bar{x}'_2 l_2 & x'_2 l_2 + x'_3 l_3 & \bar{x}'_3 l_3 & 0 \\ 0 & \bar{x}'_3 l_3 & x'_3 l_3 + x'_4 l_4 & \bar{x}'_4 l_4 \\ 0 & 0 & \bar{x}'_4 l_4 & x'_4 l_4 + x'_5 l_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ x'_{a_3} l_3^2 \\ \bar{x}'_{a_3} l_3^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

para o 4º vão:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 l_1 + x'_2 l_2 & \bar{x}'_2 l_2 & 0 & 0 \\ \bar{x}'_2 l_2 & x'_2 l_2 + x'_3 l_3 & \bar{x}'_3 l_3 & 0 \\ 0 & \bar{x}'_3 l_3 & x'_3 l_3 + x'_4 l_4 & \bar{x}'_4 l_4 \\ 0 & 0 & \bar{x}'_4 l_4 & x'_4 l_4 + x'_5 l_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ x'_{a_4} l_4^2 \\ \bar{x}'_{a_4} l_4^2 \end{Bmatrix}$$

para o 5º vão:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_1 \ell_1 + X'_2 \ell_2 & \bar{X}'_2 \ell_2 & 0 & 0 \\ \bar{X}'_2 \ell_2 & X'_2 \ell_2 + X'_3 \ell_3 & \bar{X}'_3 \ell_3 & 0 \\ 0 & \bar{X}'_3 \ell_3 & X'_3 \ell_3 + X'_4 \ell_4 & \bar{X}'_4 \ell_4 \\ 0 & 0 & \bar{X}'_4 \ell_4 & X'_4 \ell_4 + X'_5 \ell_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X'_{a5} \ell_5^2 \end{Bmatrix}$$

IV.2 - Exemplos Numéricos

1º) Cálculo da Linha de Influência do Hiperestático do Exemplo da Página 74.

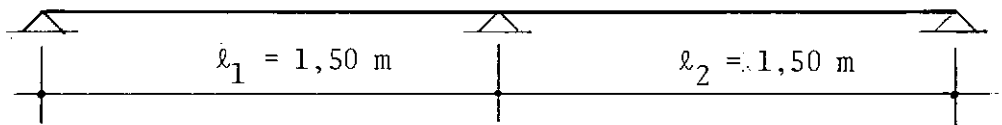



Figura IV.33

Trata-se de um perfil  6" x 2" x 23,1 com $k = 4,96 \text{ m}^{-1}$

a) Cálculo dos coeficientes:

$$k\ell = 4,96 \times 1,50 = 7,44$$

$$\chi' = \frac{1}{7,44} \left(\frac{1}{\text{th } 7,44} - \frac{1}{7,44} \right) = 0,1163$$

$$\underline{E I_{\omega} \delta_{11}} = 2 \chi' \ell = 2 \times 0,1163 \times 1,5 = 0,3490$$

Carga atuando no 1º vão:

$$\chi'_{a_1} = \frac{1}{(7,44)^2} \left(\frac{\zeta'}{\ell} - \frac{\text{sh } \frac{\zeta'}{\ell} 7,44}{\text{sh } 7,44} \right)$$

fazendo $\frac{\zeta'}{\ell} = n$, teremos:

$$\chi'_{a_1} = 0,0181 n - 2,1219 \times 10^{-5} \text{sh } (7,44n)$$

$$\underline{E I_{\omega} \delta_{10}} = \chi'_{a_1} \ell^2 = 0,0407 n - 4,7743 \times 10^{-5} \text{sh } (7,44 n)$$

Carga atuando no 2º vão:

fazendo $n' = n-1$ (Veja Figura IV.5).

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_{a_2} \ell^2 = 0,0407 n' - 4,7743 \times 10^{-5} \text{sh } (7,44 n')$$

b) Equação de Compatibilidade:

$$X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Substituindo os valores encontrados na equação acima, teremos:

$$X_1 = - \left| 0,1165 n - 0,1368 \times 10^{-3} \operatorname{sh} (7,44 n) \right| \quad \text{para o 1º vão}$$

e

$$X_1 = - \left| 0,1165 n' - 0,1368 \times 10^{-3} \operatorname{sh} (7,44 n') \right| \quad \text{para o 2º vão}$$

c) Quadro de valores

Seção	n	n'	X ₁
0	0		0
1	0,10		-0,0115
2	0,20		-0,0230
3	0,30		-0,0343
4	0,40		-0,0453
5	0,50		-0,0554
6	0,60		-0,0640
7	0,70		-0,0691
8	0,80		-0,0669
9	0,90		-0,0495
10	1,00	1,00	0
11		0,90	-0,0495
12		0,80	-0,0669
13		0,70	-0,0691
14		0,60	-0,0640
15		0,50	-0,0554
16		0,40	-0,0453
17		0,30	-0,0343
18		0,20	-0,0230
19		0,10	-0,0115
20		0	0

L. I - Bimomento Seção 10

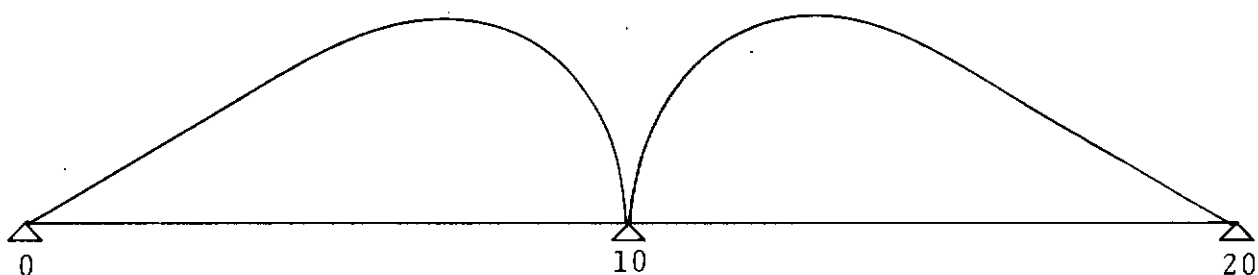


Figura IV.34

Quando o momento torçor $T = 1$ está aplicado na Seção 5 (meio do vão) o bimomento na Seção 10 será igual a 0,0554 conforme havíamos anteriormente encontrado no exemplo da página 74.

2º) Cálculo das Linhas de Influência dos Hiperestáticos de um Perfil I 10" x 4 5/8" x 59,6 kg/m.

Características do perfil:

Da Tabela 15.3, $|^{10}|$ tiramos que:

$$I_t = 82,3 \text{ cm}^4$$

$$I_\omega = 52500 \text{ cm}^6$$

O "comprimento característico" terá então por valor:

$$k = \sqrt{\frac{(1-\nu)}{2} \frac{I_t}{I_\omega}} = \sqrt{\frac{0,7}{2} \frac{82,3}{52500}} = 0,0234 \text{ cm}^{-1} = 2,34$$

1º caso: Viga contínua com 2 vãos iguais a 3,00 m

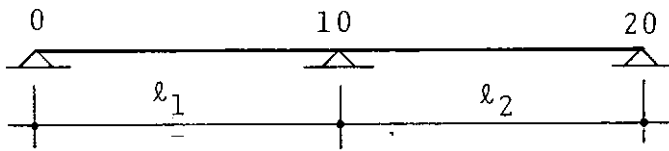


Figura IV.35

Teremos $l_1 = l_2 = 3,00 \text{ m}$.

a) Cálculo dos coeficientes:

$$k l = 2,34 \times 3,00 = 7,02$$

$$\chi' = \frac{1}{7,02} \left(\frac{1}{\text{th } 7,02} - \frac{1}{7,02} \right) = 0,1222$$

$$\underline{E I_\omega \delta_{11}} = 2 \chi' l = 2 \times 0,1222 \times 3,00 = 0,7329$$

Carga atuando no 1º vão:

$$\chi'_{a1} = \frac{1}{(7,02)^2} \left(\frac{\zeta'}{l} - \frac{\text{sh} \left(\frac{\zeta'}{l} 7,02 \right)}{\text{sh } 7,02} \right)$$

Fazendo $\frac{\zeta'}{\ell} = n$, teremos:

$$\chi'_{a_1} = 0,0203 n - 3,6275 \times 10^{-5} \operatorname{sh} (7,02 n)$$

$$\frac{E I_{\omega} \delta_{10}^1}{\ell^2} = \chi'_{a_1} \ell^2 = 0,1827 n - 3,2648 \times 10^{-4} \operatorname{sh} (7,02 n)$$

Carga atuando no 2º vão:

Este cálculo é dispensável visto ser a viga simétrica em relação a seção 10.

b) Equação de compatibilidade

$$X_{10} = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = - \left| 0,2493 n - 4,4546 \times 10^{-4} \operatorname{sh} (7,02 n) \right|$$

c) Quadro de valores de X_{10} :

Seção	n	X_{10}
0	0	0
1	0,10	-0,0246
2	0,20	-0,0507
3	0,30	-0,0730
4	0,40	-0,0960
5	0,50	-0,1172
6	0,60	-0,1346
7	0,70	-0,1442
8	0,80	-0,1382
9	0,90	-0,1009
10	1,00	0

Linha de Influência de Bimomento para a seção 10.

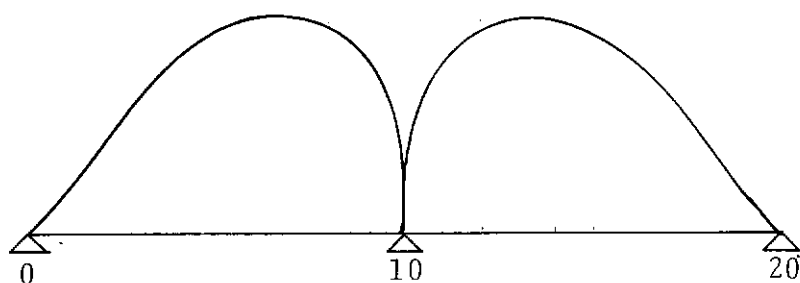


Figura IV.36

2º caso: Viga contínua com 3 vãos iguais a 3,00 m.

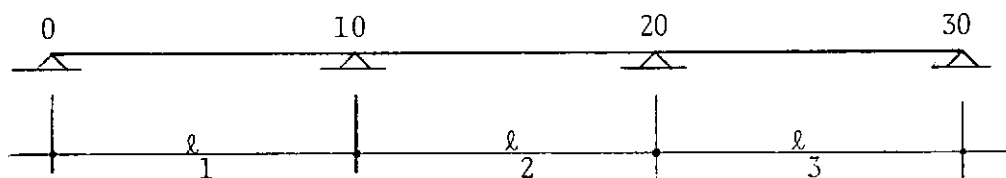


Figura IV.37

teremos $l_1 = l_2 = l_3 = 3,00 \text{ m.}$

a) Cálculo dos coeficientes:

$$\underline{E I_{\omega} \delta_{11}} = \underline{E I_{\omega} \delta_{22}} = 2 \chi' l = 0,7329$$

(já calculado para o 1º caso).

$$\bar{\chi}' = \frac{1}{7,02} \left(\frac{1}{7,02} - \frac{1}{\text{sh } 7,02} \right) = 0,0200$$

$$\underline{E I_{\omega} \delta_{12}} = \bar{\chi}' \ell = 0,0200 \times 3,00 = 0,0601$$

Carga atuando no 1º vão:

$$\underline{E I_{\omega} \delta_{10}^1} = 0,1827 n - 3,2648 \times 10^{-4} \operatorname{sh} (7,02 n)$$

(já calculado para o 1º caso).

$$\underline{E I_{\omega} \delta_{20}^1} = 0$$

Carga atuando no 2º vão:

$$\chi'_{a2} = \frac{1}{(7,02)^2} \left| \frac{\zeta'}{\ell} - \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\zeta'}{\ell} 7,02 \right)}{\operatorname{sh} 7,02} \right|$$

$$\underline{E I_{\omega} \delta_{10}^2} = 0,1827 n' - 3,2648 \times 10^{-4} \operatorname{sh} (7,02 n')$$

sendo $n' = 1 - n$.

$$\underline{E I_{\omega} \delta_{20}^2} = \underline{E I_{\omega} \delta_{10}^1} = 0,1827 n - 3,2648 \times 10^{-4} \operatorname{sh} (7,02 n)$$

Carga atuando no 3º vão:

$$\underline{E I_{\omega} \delta_{10}^3} = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{20}^3 = E I_{\omega} \delta_{10}^2 = 0,1827 \text{ n}' - 3,2648 \times 10^{-4} \text{ sh } (7,02 \text{ n})$$

b) Matriz de Rigidez

$$\begin{vmatrix} 0,7329 & 0,0601 \\ 0,0601 & 0,7329 \end{vmatrix}$$

c) Matriz de flexibilidade:

$$\begin{vmatrix} 1,3737 & -0,1126 \\ -0,1126 & 1,3737 \end{vmatrix}$$

d) Equações de compatibilidade:

$$X_{10} = -1,3737 E I_{\omega} \delta_{10} + 0,1126 E I_{\omega} \delta_{20}$$

$$X_{20} = 0,1126 E I_{\omega} \delta_{10} - 1,3737 E I_{\omega} \delta_{20}$$

e) Quadro de valores para X_{10} e X_{20}

Seção	n	n'	$E I_{\omega} \delta_{10}$	$E I_{\omega} \delta_{20}$	X_{10}	X_{20}
0	0		0	0	0	0
1	0,10		0,0180	0	-0,0247	0,0020
2	0,20		0,0359	0	-0,0493	0,0040
3	0,30		0,0535	0	-0,0735	0,0060
4	0,40		0,0704	0	-0,0967	0,0079
5	0,50		0,0859	0	-0,1180	0,0097
6	0,60		0,0986	0	-0,1354	0,0111
7	0,70		0,1057	0	-0,1452	0,0119
8	0,80		0,1013	0	-0,1392	0,0114
9	0,90		0,0739	0	-0,1015	0,0083
10	1,00	1,00	0	0	0	0
11		0,90	0,0739	0,0180	-0,0995	-0,0164
12		0,80	0,1013	0,0359	-0,1351	-0,0379
13		0,70	0,1057	0,0535	-0,1392	-0,0616
14		0,60	0,0986	0,0704	-0,1275	-0,0856
15		0,50	0,0859	0,0859	-0,1083	-0,1083
16		0,40	0,0704	0,0986	-0,0856	-0,1275
17		0,30	0,0535	0,1057	-0,0616	-0,1392
18		0,20	0,0359	0,1013	-0,0379	-0,1351
19		0,10	0,0180	0,0739	-0,0164	-0,0995
20		0	0	0	0	0
21			0	0,0739	0,0020	-0,1015
22			0	0,1013	0,0040	-0,1392
23			0	0,1057	0,0060	-0,1452
24			0	0,0986	0,0079	-0,1354
25			0	0,0859	0,0097	-0,1180
26			0	0,0704	0,0111	-0,0967
27			0	0,0535	0,0119	-0,0735
28			0	0,0359	0,0114	-0,0493
29			0	0,0180	0,0083	-0,0247
30			0	0	0	0

Figura IV.38 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 10

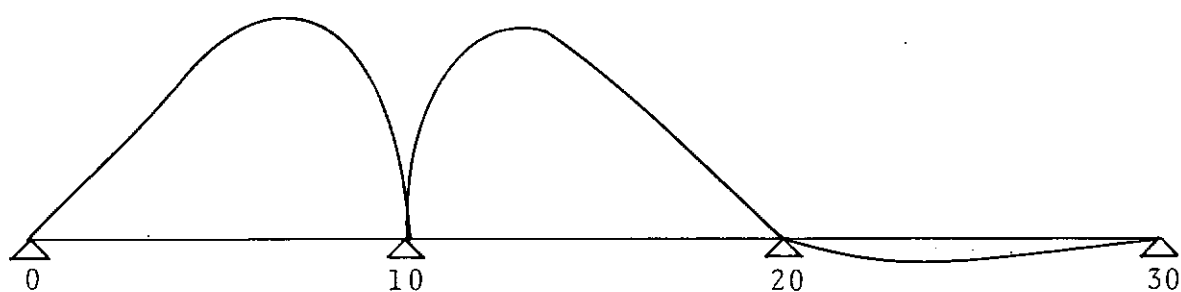
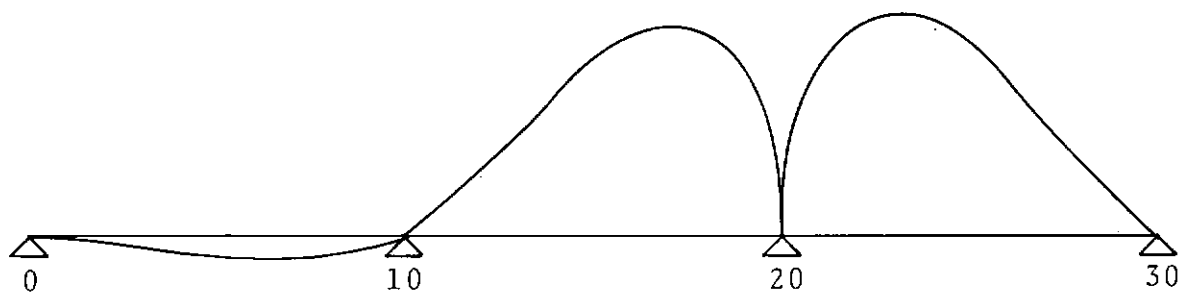


Figura IV.39 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 20



3º caso: Viga contínua com 4 vãos iguais a 3,00 m.

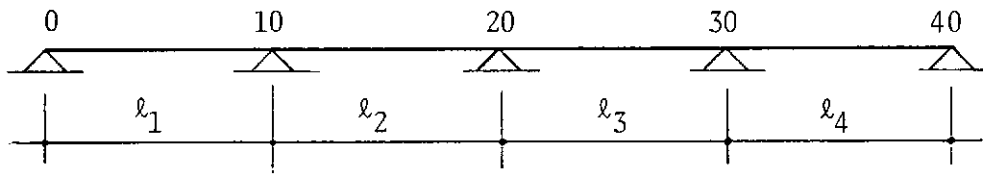


Figura IV.40

teremos $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l = 3,00 \text{ m}$.

a) Cálculo dos coeficientes:

$$\underline{E I_{\omega} \delta_{11}} = \underline{E I_{\omega} \delta_{22}} = \underline{E I_{\omega} \delta_{33}} = 0,7329$$

(já calculado para o 1º caso).

$$E I_{\omega} \delta_{12} = E I_{\omega} \delta_{23} = 0,0601 \quad (\text{já calculado para o 2º caso}).$$

$$E I_{\omega} \delta_{13} = 0$$

Os termos de carga já foram determinados para o 2º caso sendo:

$$E I_{\omega} \delta_{10} = E I_{\omega} \delta_{20}^2 = E I_{\omega} \delta_{30}^3$$

$$E I_{\omega} \delta_{10}^2 = E I_{\omega} \delta_{20}^3 = E I_{\omega} \delta_{30}^4$$

$$E I_{\omega} \delta_{10}^3 = E I_{\omega} \delta_{10}^4 = E I_{\omega} \delta_{20}^1 = E I_{\omega} \delta_{20}^4 = E I_{\omega} \delta_{30}^1 = E I_{\omega} \delta_{30}^2 = 0$$

b) Matriz de rigidez:

$$\begin{vmatrix} 0,7329 & 0,0601 & 0 \\ 0,0601 & 0,7329 & 0,0601 \\ 0 & 0,0601 & 0,7329 \end{vmatrix}$$

c) Matriz de flexibilidade:

$$\begin{vmatrix} 1,3737 & -0,1134 & 0,0093 \\ -0,1134 & 1,3830 & -0,1134 \\ 0,0093 & -0,1134 & 1,3737 \end{vmatrix}$$

d) Equações de Compatibilidade

$$X_{10} = -1,3737 E I_{\omega} \delta_{10} + 0,1134 E I_{\omega} \delta_{20} - 0,0093 E I_{\omega} \delta_{30}$$

$$X_{20} = 0,1134 E I_{\omega} \delta_{10} - 1,3830 E I_{\omega} \delta_{20} + 0,1134 E I_{\omega} \delta_{30}$$

$$X_{30} = -0,0093 E I_{\omega} \delta_{10} + 0,1134 E I_{\omega} \delta_{20} - 1,3737 E I_{\omega} \delta_{30}$$

e) Quadro de valores para X_{10} , X_{20} e X_{30}

Seção	$E I_{\omega} \delta_{10}$	$E I_{\omega} \delta_{20}$	$E I_{\omega} \delta_{10}$	X_{10}	X_{20}	X_{30}
0	0	0	0	0	0	0
1	0,0180	0	0	-0,0247	0,0020	-0,0002
2	0,0359	0	0	-0,0493	0,0041	-0,0003
3	0,0535	0	0	-0,0735	0,0061	-0,0005
4	0,0704	0	0	-0,0967	0,0080	-0,0007
5	0,0859	0	0	-0,1180	0,0097	-0,0008
6	0,0986	0	0	-0,1354	0,0112	-0,0009
7	0,1057	0	0	-0,1452	0,0120	-0,0010
8	0,1013	0	0	-0,1392	0,0115	-0,0009
9	0,0739	0	0	-0,1015	0,0084	-0,0007
10	0	0	0	0	0	0
11	0,0739	0,0180	0	-0,0995	-0,0165	0,0014
12	0,1013	0,0359	0	-0,1351	-0,0382	0,0031
13	0,1057	0,0535	0	-0,1391	-0,0620	0,0051
14	0,0986	0,0704	0	-0,1275	-0,0862	0,0071
15	0,0859	0,0859	0	-0,1083	-0,1091	0,0089
16	0,0704	0,0986	0	-0,0855	-0,1284	0,0105
17	0,0535	0,1057	0	-0,0615	-0,1401	0,0115
18	0,0359	0,1013	0	-0,0378	-0,1360	0,0113
19	0,0180	0,0739	0	-0,0163	-0,1002	0,0082
20	0	0	0	0	0	0
21	0	0,0739	0,0180	-0,0082	-0,1002	-0,0163
22	0	0,1013	0,0359	0,0113	-0,1360	-0,0378
23	0	0,1057	0,0535	0,0115	-0,1401	-0,0615
24	0	0,0986	0,0704	0,0105	-0,1284	-0,0855
25	0	0,0859	0,0859	0,0089	-0,1091	-0,1083
26	0	0,0704	0,0986	0,0071	-0,0862	-0,1275
27	0	0,0535	0,1057	0,0051	-0,0620	-0,1391
28	0	0,0359	0,1013	0,0031	-0,0382	-0,1351
29	0	0,0180	0,0739	0,0014	-0,0165	-0,0995
30	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0,0739	-0,0007	0,0084	-0,1015
32	0	0	0,1013	-0,0009	0,0115	-0,1392
33	0	0	0,1057	-0,0010	0,0120	-0,1452
34	0	0	0,0986	-0,0009	0,0112	-0,1354
35	0	0	0,0859	-0,0008	0,0097	-0,1180
36	0	0	0,0704	-0,0007	0,0080	-0,0967
37	0	0	0,0535	-0,0005	0,0061	-0,0735
38	0	0	0,0359	-0,0003	0,0041	-0,0493
39	0	0	0,0180	-0,0002	0,0020	-0,0247
40	0	0	0	0	0	0

Figura IV.41 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 10

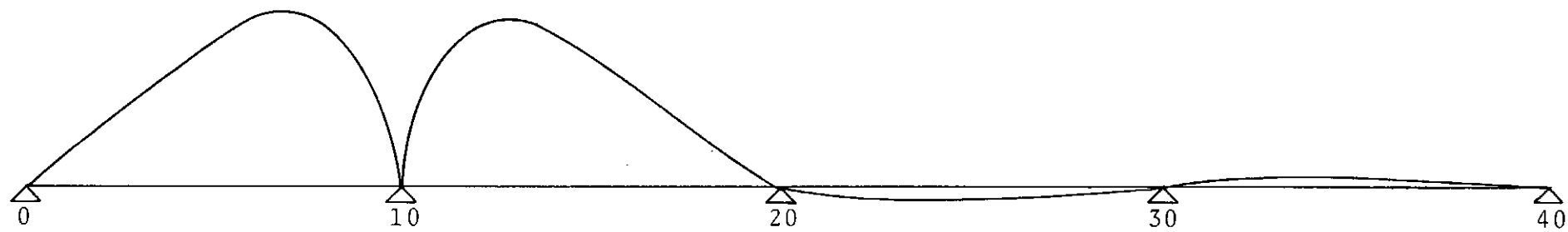


Figura IV.42 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 20

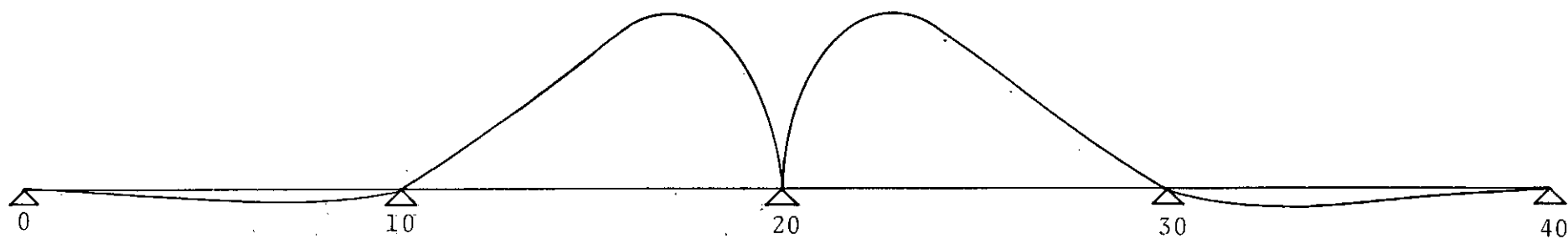
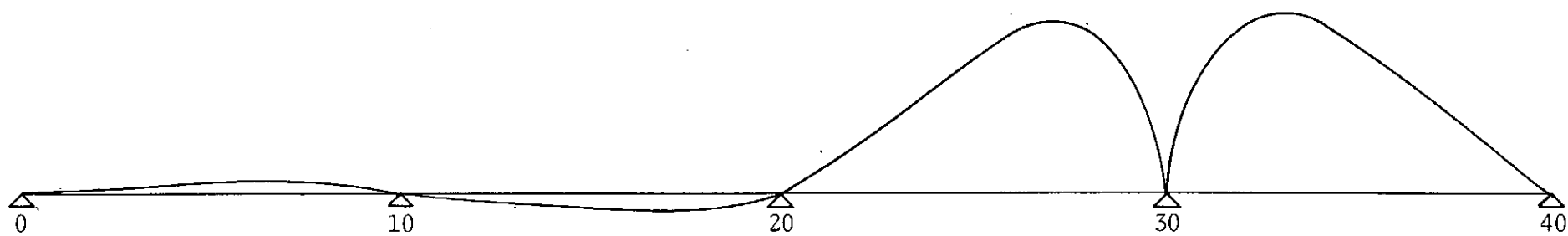


Figura IV.43 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 30



4º caso: Viga contínua com 5 vãos iguais a 3,00 m.

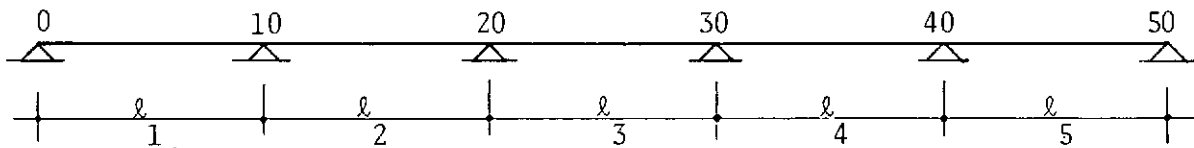


Figura IV.44

teremos $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l = 3,00 \text{ m.}$

a) Cálculo dos coeficientes:

Foram todos calculados para os casos anteriores.

$$E I_{\omega} \delta_{11} = E I_{\omega} \delta_{22} = E I_{\omega} \delta_{33} = E I_{\omega} \delta_{44} = 0,7329$$

$$E I_{\omega} \delta_{12} = E I_{\omega} \delta_{23} = E I_{\omega} \delta_{34} = 0,0601$$

$$E I_{\omega} \delta_{13} = E I_{\omega} \delta_{14} = E I_{\omega} \delta_{24} = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{10}^1 = E I_{\omega} \delta_{20}^2 = E I_{\omega} \delta_{30}^3 = E I_{\omega} \delta_{40}^4$$

$$E I_{\omega} \delta_{10}^2 = E I_{\omega} \delta_{20}^3 = E I_{\omega} \delta_{30}^4 = E I_{\omega} \delta_{40}^5$$

$$E I_{\omega} \delta_{10}^3 = E I_{\omega} \delta_{10}^4 = E I_{\omega} \delta_{10}^5 = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{20}^1 = E I_{\omega} \delta_{20}^4 = E I_{\omega} \delta_{20}^5 = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{30}^1 = E I_{\omega} \delta_{30}^2 = E I_{\omega} \delta_{30}^3 = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{40}^1 = E I_{\omega} \delta_{40}^2 = E I_{\omega} \delta_{40}^3 = 0$$

b) Matriz de rigidez:

$$\begin{vmatrix} 0,7329 & 0,0601 & 0 & 0 \\ 0,0601 & 0,7329 & 0,0601 & 0 \\ 0 & 0,0601 & 0,7329 & 0,0601 \\ 0 & 0 & 0,0601 & 0,7329 \end{vmatrix}$$

c) Matriz de Flexibilidade:

$$\begin{vmatrix} 1,3737 & -0,1134 & 0,0094 & -0,0008 \\ -0,1134 & 1,3831 & -0,1142 & 0,0094 \\ 0,0094 & -0,1142 & 1,3831 & -0,1134 \\ -0,0008 & 0,0094 & -0,1134 & 1,3737 \end{vmatrix}$$

d) Equações de compatibilidade:

$$X_{10} = -1,3737 E I_{\omega} \delta_{10} + 0,1134 E I_{\omega} \delta_{20} - 0,0094 E I_{\omega} \delta_{30} + 0,0008 E I_{\omega} \delta_{40}$$

$$X_{20} = 0,1134 E I_{\omega} \delta_{10} - 1,3831 E I_{\omega} \delta_{20} + 0,1142 E I_{\omega} \delta_{30} - 0,0094 E I_{\omega} \delta_{40}$$

$$X_{30} = -0,0094 E I_{\omega} \delta_{10} + 0,1142 E I_{\omega} \delta_{20} - 1,3831 E I_{\omega} \delta_{30} + 0,1134 E I_{\omega} \delta_{40}$$

$$X_{40} = 0,0008 E I_{\omega} \delta_{10} - 0,0094 E I_{\omega} \delta_{20} + 0,1134 E I_{\omega} \delta_{30} - 1,3737 E I_{\omega} \delta_{40}$$

e) Quadro de valores para X_{10} , X_{20} , X_{30} e X_{40} .

Seção	$E I_{\omega} \delta_{10}$	$E I_{\omega} \delta_{20}$	$E I_{\omega} \delta_{30}$	$E I_{\omega} \delta_{40}$	X_{10}	X_{20}	X_{30}	X_{40}
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,0180	0	0	0	-0,0247	0,0020	-0,0002	0
2	0,0359	0	0	0	-0,0493	0,0041	-0,0003	0
3	0,0535	0	0	0	-0,0735	0,0061	-0,0005	0
4	0,0704	0	0	0	-0,0967	0,0080	-0,0007	0,0001
5	0,0859	0	0	0	-0,1180	0,0097	-0,0008	0,0001
6	0,0986	0	0	0	-0,1354	0,0112	-0,0009	0,0001
7	0,1057	0	0	0	-0,1452	0,0120	-0,0010	0,0001
8	0,1013	0	0	0	-0,1392	0,0115	-0,0010	0,0001
9	0,0739	0	0	0	-0,1015	0,0084	-0,0007	0,0001
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0,0739	0,0180	0	0	-0,0995	-0,0165	0,0014	-0,0001
12	0,1013	0,0359	0	0	-0,1351	-0,0382	0,0031	-0,0003
13	0,1057	0,0535	0	0	-0,1391	-0,0620	0,0051	-0,0004
14	0,0986	0,0704	0	0	-0,1275	-0,0862	0,0071	-0,0006
15	0,0859	0,0859	0	0	-0,1083	-0,1091	0,0090	-0,0007
16	0,0704	0,0986	0	0	-0,0855	-0,1284	0,0106	-0,0009
17	0,0535	0,1057	0	0	-0,0615	-0,1401	0,0116	-0,0010
18	0,0359	0,1013	0	0	-0,0378	-0,1360	0,0112	-0,0009
19	0,0180	0,0739	0	0	-0,0163	-0,1002	0,0083	-0,0007
20	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0,0739	0,0180	0	0,0082	-0,1002	-0,0165	0,0014
22	0	0,1013	0,0359	0	0,0113	-0,1360	-0,0381	0,0031
23	0	0,1057	0,0535	0	0,0115	-0,1401	-0,0619	0,0051
24	0	0,0986	0,0704	0	0,0105	-0,1283	-0,0861	0,0071
25	0	0,0859	0,0859	0	0,0089	-0,1090	-0,1090	0,0089
26	0	0,0704	0,0986	0	0,0071	-0,0861	-0,1283	0,0105
27	0	0,0535	0,1057	0	0,0051	-0,0619	-0,1401	0,0115
28	0	0,0359	0,1013	0	0,0031	-0,0381	-0,1360	0,0113
29	0	0,0180	0,0739	0	0,0014	-0,0165	-0,1002	0,0082
30	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0,0739	0,0180	-0,0007	0,0083	-0,1002	-0,0163
32	0	0	0,1013	0,0359	-0,0009	0,0112	-0,1360	-0,0378
33	0	0	0,1057	0,0535	-0,0010	0,0116	-0,1401	-0,0615
34	0	0	0,0986	0,0704	-0,0009	0,0106	-0,1284	-0,0855
35	0	0	0,0859	0,0859	-0,0007	0,0090	-0,1091	-0,1083
36	0	0	0,0704	0,0986	-0,0006	0,0071	-0,0862	-0,1275
37	0	0	0,0535	0,1057	-0,0004	0,0051	-0,0620	-0,1391
38	0	0	0,0359	0,1013	-0,0003	0,0031	-0,0382	-0,1351
39	0	0	0,0180	0,0739	-0,0001	0,0014	-0,0165	-0,0995
40	0	0	0	0	0	0	0	0
41	0	0	0	0,0739	0,0001	-0,0007	0,0084	-0,1015
42	0	0	0	0,1013	0,0001	-0,0010	0,0115	-0,1392
43	0	0	0	0,1057	0,0001	-0,0010	0,0120	-0,1452
44	0	0	0	0,0986	0,0001	-0,0009	0,0112	-0,1354
45	0	0	0	0,0859	0,0001	-0,0008	0,0097	-0,1180
46	0	0	0	0,0704	0,0001	-0,0007	0,0080	-0,0967
47	0	0	0	0,0535	0	-0,0005	0,0061	-0,0735
48	0	0	0	0,0359	0	-0,0003	0,0041	-0,0493
49	0	0	0	0,0180	0	-0,0002	0,0020	-0,0247
50	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura IV.45 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 10.

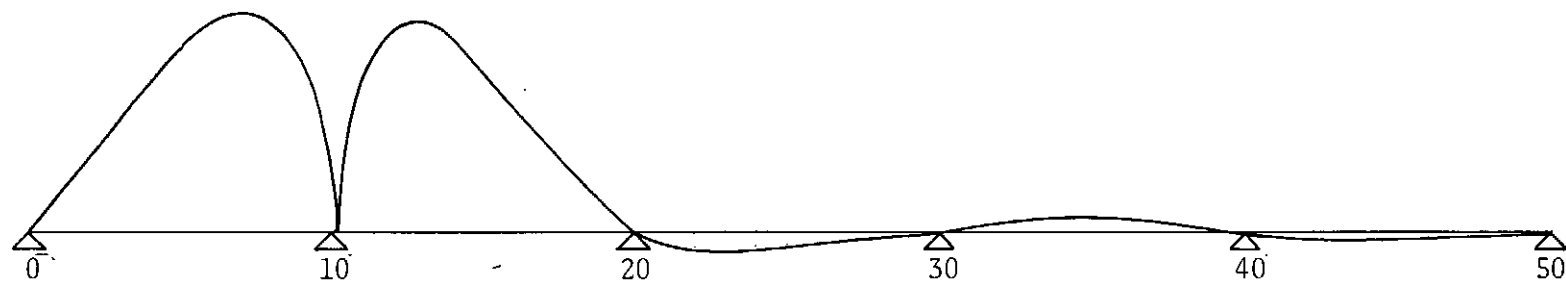


Figura IV.46 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 20

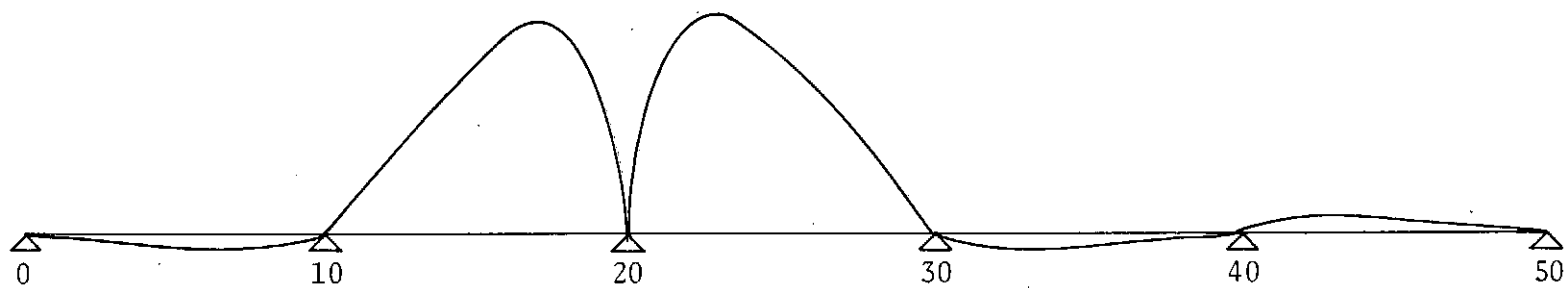


Figura IV.47 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 30

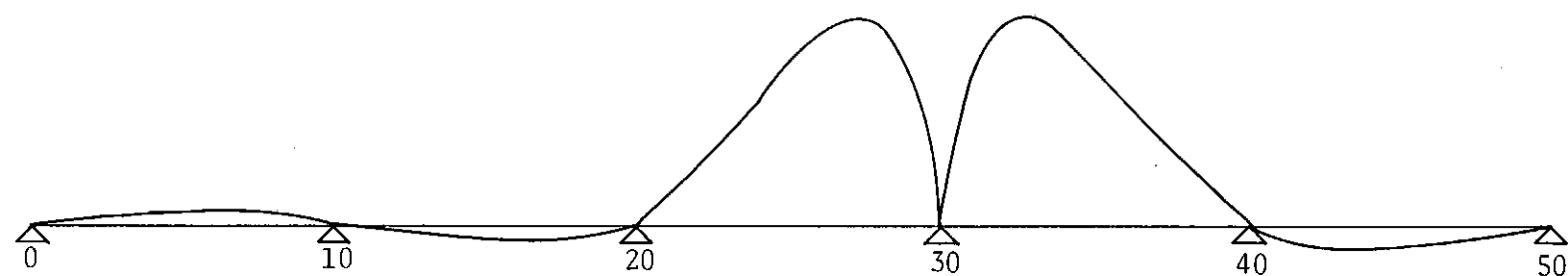
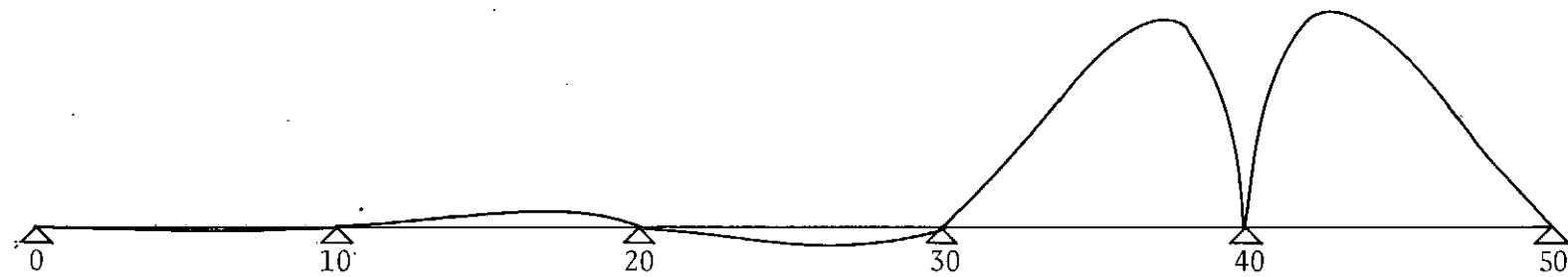


Figura IV.48 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 40



3º) Cálculo das Linhas de Influência dos Hiperestáticos de um Perfil I 20" x 7" x 148,9 kg/m:

Características do perfil

Da Tabela 15.3, | 1º | obtemos:

$$I_t = 410 \text{ cm}^4$$

$$I_\omega = 1240 \ 000 \text{ cm}^6$$

$$k = \sqrt{\frac{(1-\nu)}{2} \frac{I_t}{I_\omega}} = \sqrt{\frac{0,7}{2} \frac{410}{1240000}} = 0,0108 \text{ cm}^{-1} = 1,08 \text{ m}^{-1}$$

1º caso: viga contínua com 2 vãos iguais a 3,00 (Veja Fig. IV-35)

A) Cálculo dos coeficientes

$$k\ell = 1,08 \times 3,00 = 3,24$$

$$\chi' = \frac{1}{3,24} \left(\frac{1}{\text{th } 3,24} - \frac{1}{3,24} \right) = 0,2143$$

$$E I_\omega \delta_{11} = 2 \chi' \ell = 2 \times 0,2143 \times 3,00 = 1,2860$$

Carga atuando no 1º vão:

$$\chi'_{a_1} = \frac{1}{(3,24)^2} \left(\frac{\zeta'}{\ell} - \frac{\text{sh} \left(\frac{\zeta'}{\ell} 3,24 \right)}{\text{sh } 3,24} \right)$$

fazendo $\frac{\zeta'}{\ell} = n$, vem:

$$\chi'_{a_1} = 0,0953 n - 0,0075 \text{ sh } (3,24 n)$$

$$E I_{\omega} \delta_{10} = \chi'_{a_1} \ell^2 = 0,8573 n - 0,0673 \text{ sh } (3,24 n)$$

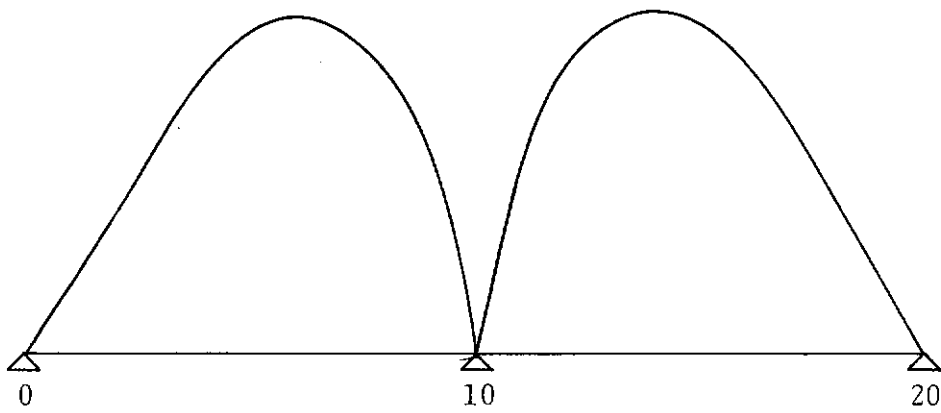
b) Equação de compatibilidade:

$$X_{10} = - \frac{E I_{\omega} \delta_{10}}{E I_{\omega} \delta_{11}} = -0,7776 E I_{\omega} \delta_{10}$$

c) Quadro de valores de X_{10}

Seção	n	$E I_{\omega} \delta_{10}$	X_{10}
0	0	0	0
1	0,10	0,0635	-0,0494
2	0,20	0,1247	-0,0970
3	0,30	0,1810	-0,1407
4	0,40	0,2291	-0,1781
5	0,50	0,2653	-0,2063
6	0,60	0,2841	-0,2209
7	0,70	0,2785	-0,2166
8	0,80	0,2389	-0,1858
9	0,90	0,1520	-0,1182
10	1,00	0	0

Figura IV.49 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 10



2º caso: Viga contínua com 3 vãos iguais a 3,00 m (Veja Figura IV-37).

a) Cálculo dos coeficientes:

$$E I_{\omega} \delta_{11} = E I_{\omega} \delta_{22} = 1,2860 \quad (\text{já calculado para 1º caso})$$

$$\bar{\chi}' = \frac{1}{3,24} \left(\frac{1}{3,24} - \frac{1}{\text{sh } 3,24} \right) = 0,0710$$

$$E I_{\omega} \delta_{12} = \bar{\chi}' \ell = 0,0710 \times 3,00 = 0,2131$$

carga atuando no 1º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{10}^1 \quad (\text{já calculado para o 1º caso}).$$

$$E I_{\omega} \delta_{20}^1 = 0$$

carga atuando no 2º vão:

$$\chi'_{a_2} = \frac{1}{(3,24)^2} \left| \frac{\zeta'}{\ell} - \frac{\text{sh} \left(\frac{\xi'}{\ell} 3,24 \right)}{\text{sh } 3,24} \right|$$

$$E I_{\omega} \delta_{10}^2 = 0,8573 n' - 0,0673 \text{ sh } (3,24 n')$$

sendo $n' = 1 - n$

$$E I_{\omega} \delta_{20}^2 = E I_{\omega} \delta_{10}^1$$

carga atuando no 3º vão:

$$E I_{\omega} \delta_{10}^3 = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{20}^3 = E I_{\omega} \delta_{10}^2$$

b) Matriz de rigidez:

$$\begin{vmatrix} 1,2860 & 0,2131 \\ 0,2131 & 1,2860 \end{vmatrix}$$

c) Matriz de flexibilidade:

$$\begin{vmatrix} 0,7996 & -0,1325 \\ -0,1325 & 0,7996 \end{vmatrix}$$

d) Equações de compatibilidade

$$X_{10} = -0,7996 E I_{\omega} \delta_{10} + 0,1325 E I_{\omega} \delta_{20}$$

$$X_{20} = 0,1325 E I_{\omega} \delta_{10} - 0,7996 E I_{\omega} \delta_{20}$$

e) Quadro de valores para X_{10} e X_{20}

Seção	n	$E I_{\omega \delta_{10}}$	$E I_{\omega \delta_{20}}$	X_{10}	X_{20}
0		0	0	0	0
1		0,0635		-0,0508	0,0084
2		0,1247	0	-0,0997	0,0165
3		0,1810	0	-0,1447	0,0240
4		0,2291	0	-0,1832	0,0304
5		0,2653	0	-0,2121	0,0352
6		0,2841	0	-0,2272	0,0376
7		0,2785	0	-0,2227	0,0369
8		0,2389	0	-0,1910	0,0317
9		0,1520	0	-0,1215	0,0201
10	1,00	0	0	0	0
11	0,90	0,1520	0,0635	-0,1131	-0,0306
12	0,80	0,2389	0,1247	-0,1745	-0,0681
13	0,70	0,2785	0,1810	-0,1987	-0,1078
14	0,60	0,2841	0,2291	-0,1968	-0,1455
15	0,50	0,2653	0,2653	-0,1770	-0,1770
16	0,40	0,2291	0,2841	-0,1455	-0,1968
17	0,30	0,1810	0,2785	-0,1078	-0,1987
18	0,20	0,1247	0,2389	-0,0681	-0,1745
19	0,10	0,0635	0,1520	-0,0306	-0,1131
20	0	0	0	0	0
21		0	0,1520	0,0201	-0,1215
22		0	0,2389	0,0317	-0,1910
23		0	0,2785	0,0369	-0,2227
24		0	0,2841	0,0376	-0,2272
25		0	0,2653	0,0352	-0,2121
26		0	0,2291	0,0304	-0,1832
27		0	0,1810	0,0240	-0,1447
28		0	0,1247	0,0165	-0,0997
29		0	0,0635	0,0084	-0,0508
30		0	0	0	0

Figura IV.50 Linha de Influência de Bimomento para a Seção 10

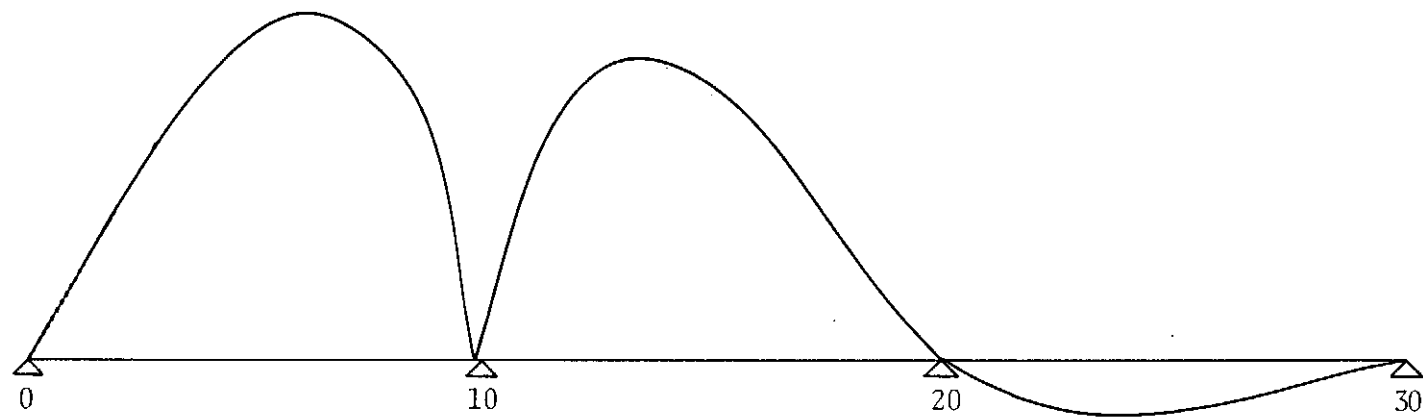
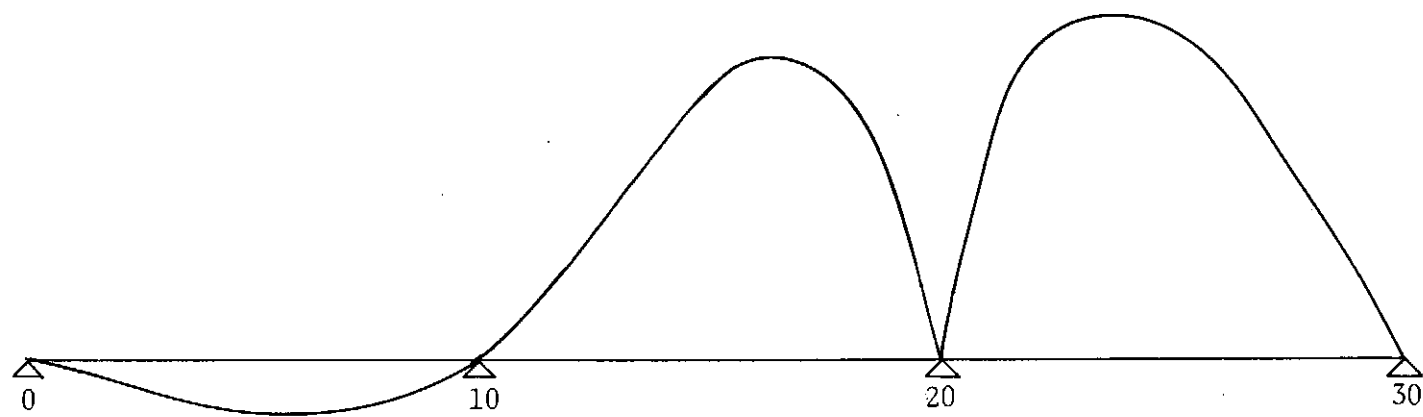


Figura IV.51 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 20



3º caso: Viga Contínua com 4 vãos iguais a 3,00 m (Veja Figura IV-40)

a) Cálculo dos coeficientes:

$$E I_{\omega} \delta_{11} = E I_{\omega} \delta_{22} = E I_{\omega} \delta_{33} = 1,2860 \quad (\text{já calculado para o 1º caso}).$$

$$E I_{\omega} \delta_{12} = E I_{\omega} \delta_{23} = 0,2131 \quad (\text{já calculado para o 2º caso}).$$

$$E I_{\omega} \delta_{13} = 0$$

Os termos de carga já foram determinados para o 2º caso, sendo:

$$E I_{\omega} \delta_{10}^1 = E I_{\omega} \delta_{20}^2 = E I_{\omega} \delta_{30}^3$$

$$E I_{\omega} \delta_{10}^2 = E I_{\omega} \delta_{20}^3 = E I_{\omega} \delta_{30}^4$$

$$E I_{\omega} \delta_{10}^3 = E I_{\omega} \delta_{10}^4 = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{20}^1 = E I_{\omega} \delta_{20}^4 = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{30}^1 = E I_{\omega} \delta_{30}^2 = 0$$

b.) Matriz de rigidez:

$$\begin{vmatrix} 1,2860 & 0,2131 & 0 \\ 0,2131 & 1,2860 & 0,2131 \\ 0 & 0,2131 & 1,2860 \end{vmatrix}$$

c) Matriz de Flexibilidade:

$$\begin{vmatrix} 0,8002 & -0,1363 & 0,0226 \\ -0,1363 & 0,8228 & -0,1363 \\ 0,0226 & -0,1363 & 0,8002 \end{vmatrix}$$

d) Equações de compatibilidade:

$$X_{10} = -0,8002 E I_{\omega} \delta_{10} + 0,1363 E I_{\omega} \delta_{20} - 0,0226 E I_{\omega} \delta_{30}$$

$$X_{20} = 0,1363 E I_{\omega} \delta_{10} - 0,8228 E I_{\omega} \delta_{20} + 0,1363 E I_{\omega} \delta_{30}$$

$$X_{30} = -0,0226 E I_{\omega} \delta_{10} + 0,1363 E I_{\omega} \delta_{20} - 0,8002 E I_{\omega} \delta_{30}$$

d) Quadro de valores para X_{10} , X_{20} e X_{30}

Seção	$E I_{\omega} \delta_{10}$	$E I_{\omega} \delta_{20}$	$E I_{\omega} \delta_{30}$	X_{10}	X_{20}	X_{30}
0	0	0	0	0	0	0
1	0,0635	0	0	-0,0508	0,0087	-0,0014
2	0,1247	0	0	-0,0998	0,0170	-0,0028
3	0,1810	0	0	-0,1448	0,0247	-0,0041
4	0,2291	0	0	-0,1833	0,0312	-0,0052
5	0,2653	0	0	-0,2123	0,0362	-0,0060
6	0,2841	0	0	-0,2273	0,0387	-0,0064
7	0,2785	0	0	-0,2229	0,0380	-0,0063
8	0,2389	0	0	-0,1912	0,0326	-0,0054
9	0,1520	0	0	-0,1216	0,0207	-0,0034
10	0	0	0	0	0	0
11	0,1520	0,0635	0	-0,1130	-0,0315	0,0052
12	0,2389	0,1247	0	-0,1742	-0,0700	0,0116
13	0,2785	0,1810	0	-0,1982	-0,1110	0,0184
14	0,2841	0,2291	0	-0,1961	-0,1498	0,0248
15	0,2653	0,2653	0	-0,1761	-0,1821	0,0302
16	0,2291	0,2841	0	-0,1446	-0,2025	0,0335
17	0,1810	0,2785	0	-0,1069	-0,2045	0,0339
18	0,1247	0,2389	0	-0,0672	-0,1796	0,0297
19	0,0635	0,1520	0	-0,0301	-0,1164	0,0193
20	0	0	0	0	0	0
21	0	0,1520	0,0635	0,0193	-0,1164	-0,0301
22	0	0,2389	0,1247	0,0297	-0,1796	-0,0672
23	0	0,2785	0,1810	0,0339	-0,2045	-0,1069
24	0	0,2841	0,2291	0,0335	-0,2025	-0,1446
25	0	0,2653	0,2653	0,0302	-0,1821	-0,1761
26	0	0,2291	0,2841	0,0248	-0,1498	-0,1961
27	0	0,1810	0,2785	0,0184	-0,1110	-0,1982
28	0	0,1247	0,2389	0,0116	-0,0700	-0,1742
29	0	0,0635	0,1520	0,0052	-0,0315	-0,1130
30	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0,1520	-0,0034	0,0207	-0,1216
32	0	0	0,2389	-0,0054	0,0326	-0,1912
33	0	0	0,2785	-0,0063	0,0380	-0,2229
34	0	0	0,2841	-0,0064	0,0387	-0,2273
35	0	0	0,2653	-0,0060	0,0362	-0,2123
36	0	0	0,2291	-0,0052	0,0312	-0,1833
37	0	0	0,1810	-0,0041	0,0247	-0,1448
38	0	0	0,1247	-0,0028	0,0170	-0,0998
39	0	0	0,0635	-0,0014	0,0087	-0,0508
40	0	0	0	0	0	0

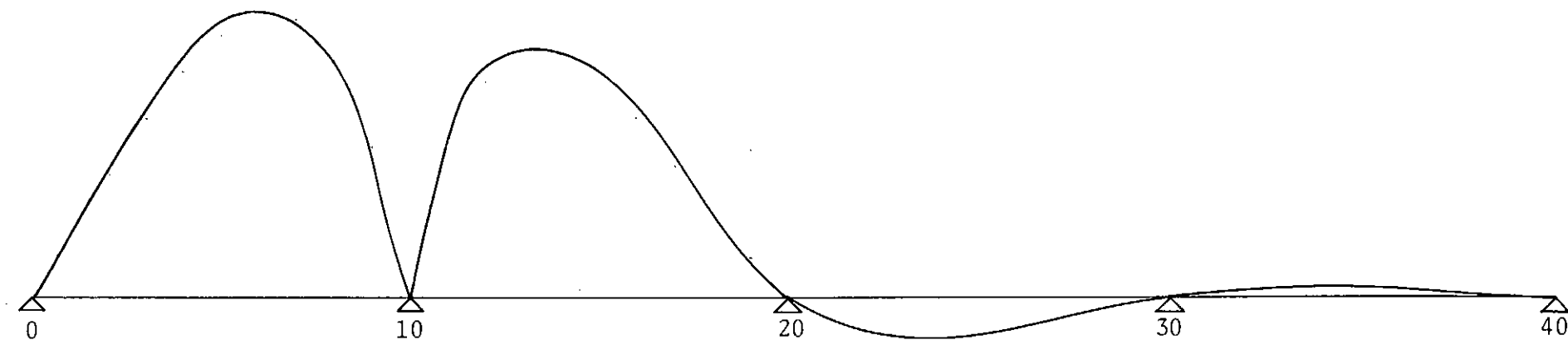


Figura IV.52 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 10

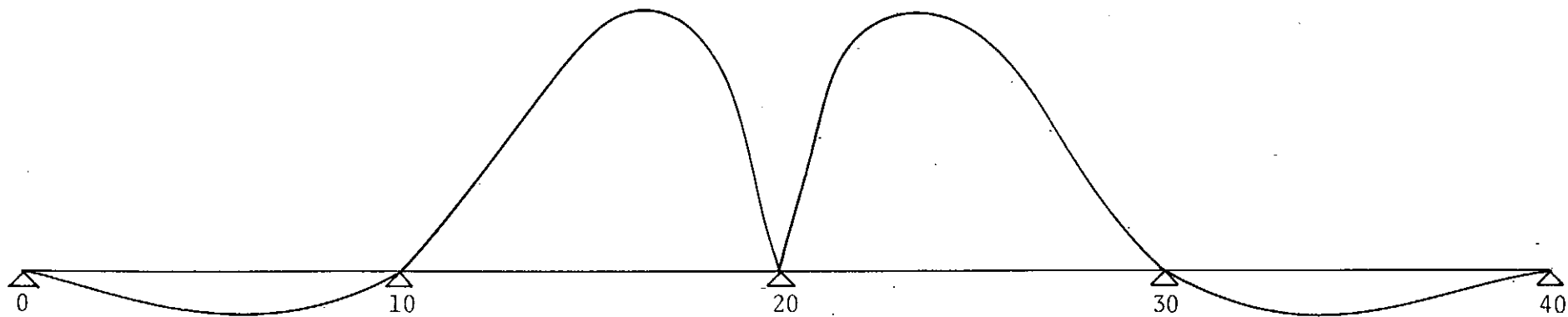


Figura IV.53 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 20

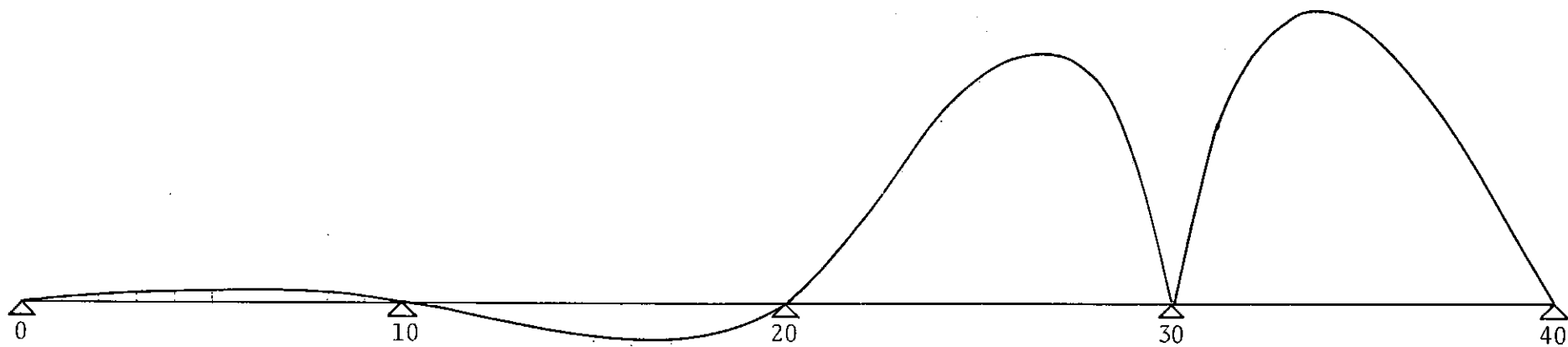


Figura IV.54 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 30

4º caso: Viga contínua com 5 vãos iguais a 3,00 m (Veja Figura IV-44).

a) Cálculo dos coeficientes

Foram calculados para os casos anteriores:

$$E I_{\omega} \delta_{11} = E I_{\omega} \delta_{22} = E I_{\omega} \delta_{33} = E I_{\omega} \delta_{44} = 1,2860$$

$$E I_{\omega} \delta_{12} = E I_{\omega} \delta_{23} = E I_{\omega} \delta_{34} = 0,2131$$

$$E I_{\omega} \delta_{13} = E I_{\omega} \delta_{14} = E I_{\omega} \delta_{24} = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{10}^1 = E I_{\omega} \delta_{20}^2 = E I_{\omega} \delta_{30}^3 = E I_{\omega} \delta_{40}^4$$

$$E I_{\omega} \delta_{10}^2 = E I_{\omega} \delta_{20}^3 = E I_{\omega} \delta_{30}^4 = E I_{\omega} \delta_{40}^5$$

$$E I_{\omega} \delta_{10}^3 = E I_{\omega} \delta_{10}^4 = E I_{\omega} \delta_{10}^5 = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{20}^1 = E I_{\omega} \delta_{20}^4 = E I_{\omega} \delta_{20}^5 = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{30}^1 = E I_{\omega} \delta_{30}^2 = E I_{\omega} \delta_{30}^5 = 0$$

$$E I_{\omega} \delta_{40}^1 = E I_{\omega} \delta_{40}^2 = E I_{\omega} \delta_{40}^3 = 0$$

b) Matriz de rigidez:

1,2860	0,2131	0	0
0,2131	1,2860	0,2131	0
0	0,2131	1,2860	0,2131
0	0	0,2131	1,2860

c) Matriz de Flexibilidade:

0,8002	-0,1365	0,0233	-0,0039
-0,1365	0,8235	-0,1403	0,0233
0,0233	-0,1403	0,8235	-0,1365
-0,0039	0,0233	-0,1365	0,8002

d) Equações de Compatibilidade:

$$X_{10} = -0,8002 E I_{\omega} \delta_{10} + 0,1365 E I_{\omega} \delta_{20} - 0,0233 E I_{\omega} \delta_{30} + 0,0039 E I_{\omega} \delta_{40}$$

$$X_{20} = 0,1365 E I_{\omega} \delta_{10} - 0,8235 E I_{\omega} \delta_{20} + 0,1403 E I_{\omega} \delta_{30} - 0,0233 E I_{\omega} \delta_{40}$$

$$X_{30} = -0,0233 E I_{\omega} \delta_{10} + 0,1403 E I_{\omega} \delta_{20} - 0,8235 E I_{\omega} \delta_{30} + 0,1365 E I_{\omega} \delta_{40}$$

$$X_{40} = 0,0039 E I_{\omega} \delta_{10} - 0,0233 E I_{\omega} \delta_{20} + 0,1365 E I_{\omega} \delta_{30} - 0,8002 E I_{\omega} \delta_{40}$$

e) Quadro de valores para X_{10} , X_{20} , X_{30} e X_{40}

Seção	$E I_{\omega} \delta_{10}$	$E I_{\omega} \delta_{20}$	$E I_{\omega} \delta_{30}$	$E I_{\omega} \delta_{40}$	X_{10}	X_{20}	X_{30}	X_{40}
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,0635	0	0	0	-0,0508	0,0087	-0,0015	0,0002
2	0,1247	0	0	0	-0,0998	0,0170	-0,0029	0,0005
3	0,1810	0	0	0	-0,1448	0,0247	-0,0042	0,0007
4	0,2291	0	0	0	-0,1833	0,0313	-0,0053	0,0009
5	0,2653	0	0	0	-0,2123	0,0362	-0,0062	0,0010
6	0,2841	0	0	0	-0,2273	0,0388	-0,0066	0,0011
7	0,2785	0	0	0	-0,2229	0,0380	-0,0065	0,0011
8	0,2389	0	0	0	-0,1912	0,0326	-0,0056	0,0009
9	0,1520	0	0	0	-0,1216	0,0207	-0,0035	0,0006
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0,1520	0,0635	0	0	-0,1130	-0,0315	0,0054	-0,0009
12	0,2389	0,1247	0	0	-0,1741	-0,0701	0,0119	-0,0020
13	0,2785	0,1810	0	0	-0,1981	-0,1110	0,0189	-0,0031
14	0,2841	0,2291	0	0	-0,1961	-0,1499	0,0255	-0,0042
15	0,2653	0,2653	0	0	-0,1761	-0,1823	0,0310	-0,0051
16	0,2291	0,2841	0	0	-0,1445	-0,2027	0,0345	-0,0057
17	0,1810	0,2785	0	0	-0,1068	-0,2046	0,0349	-0,0058
18	0,1247	0,2389	0	0	-0,0672	-0,1797	0,0306	-0,0051
19	0,0635	0,1520	0	0	-0,0301	-0,1165	0,0198	-0,0033
20	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0,1520	0,0635	0	0,0193	-0,1163	-0,0310	0,0051
22	0	0,2389	0,1247	0	0,0297	-0,1792	-0,0692	0,0115
23	0	0,2785	0,1810	0	0,0338	-0,2040	-0,1100	0,0182
24	0	0,2841	0,2291	0	0,0334	-0,2018	-0,1488	0,0247
25	0	0,2653	0,2653	0	0,0300	-0,1813	-0,1813	0,0300
26	0	0,2291	0,2841	0	0,0247	-0,1488	-0,2018	0,0334
27	0	0,1810	0,2785	0	0,0182	-0,1100	-0,2040	0,0338
28	0	0,1247	0,2389	0	0,0115	-0,0692	-0,1792	0,0297
29	0	0,0635	0,1520	0	0,0051	-0,0310	-0,1163	0,0193
30	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0,1520	0,0635	-0,0033	0,0198	-0,1165	-0,0301
32	0	0	0,2389	0,1247	-0,0051	0,0306	-0,1797	-0,0672
33	0	0	0,2785	0,1810	-0,0058	0,0349	-0,2046	-0,1068
34	0	0	0,2841	0,2291	-0,0057	0,0345	-0,2027	-0,1445
35	0	0	0,2653	0,2653	-0,0051	0,0310	-0,1823	-0,1761
36	0	0	0,2291	0,2841	-0,0042	0,0255	-0,1499	-0,1961
37	0	0	0,1810	0,2785	-0,0031	0,0189	-0,1110	-0,1981
38	0	0	0,1247	0,2389	-0,0020	0,0119	-0,0701	-0,1741
39	0	0	0,0635	0,1520	-0,0009	0,0054	-0,0315	-0,1130
40	0	0	0	0	0	0	0	0
41	0	0	0	0,1520	0,0006	-0,0035	0,0207	-0,1216
42	0	0	0	0,2389	0,0009	-0,0056	0,0326	-0,1912
43	0	0	0	0,2785	0,0011	-0,0065	0,0380	-0,2229
44	0	0	0	0,2841	0,0011	-0,0066	0,0388	-0,2273
45	0	0	0	0,2653	0,0010	-0,0062	0,0362	-0,2123
46	0	0	0	0,2291	0,0009	-0,0053	0,0313	-0,1833
47	0	0	0	0,1810	0,0007	-0,0042	0,0247	-0,1448
48	0	0	0	0,1247	0,0005	-0,0029	0,0170	-0,0998
49	0	0	0	0,0635	0,0002	-0,0015	0,0087	-0,0508
50	0	0	0	0	0	0	0	0

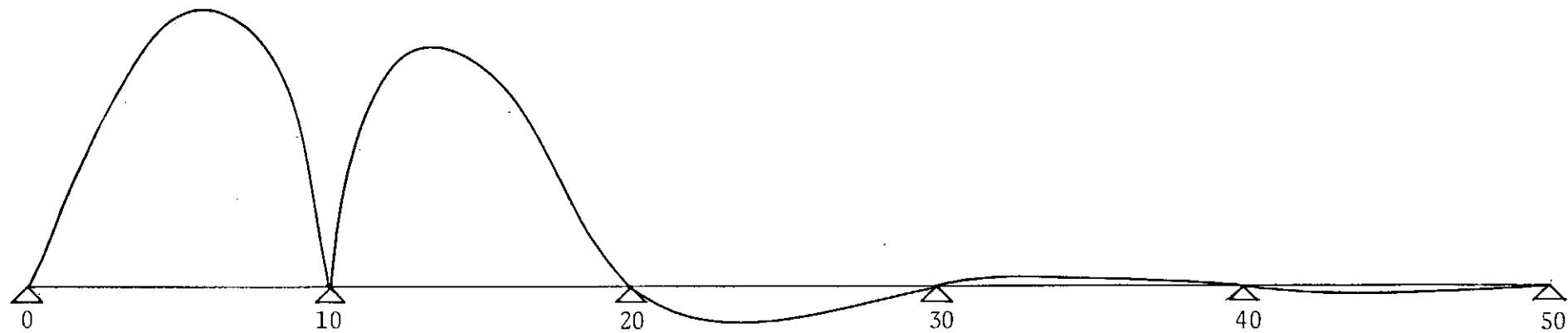


Figura IV.55 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 10

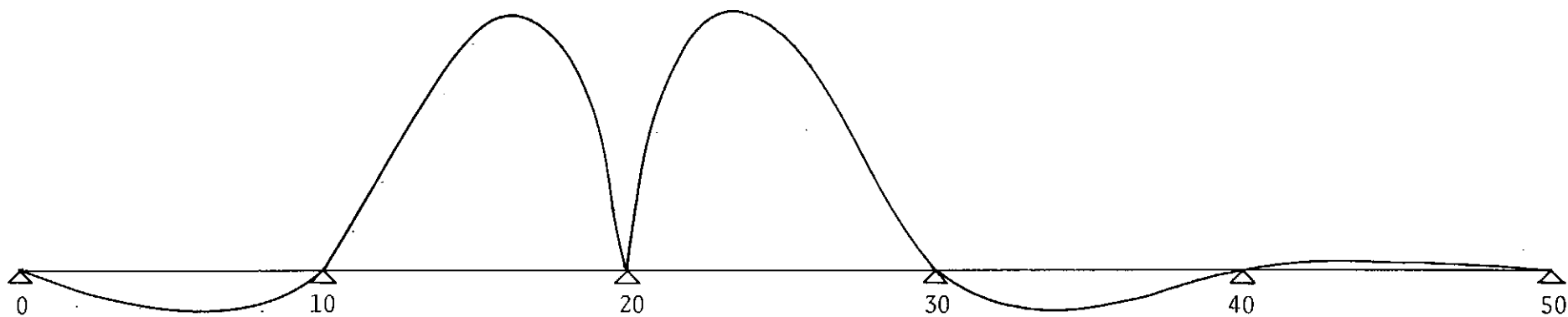


Figura IV.56 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 20

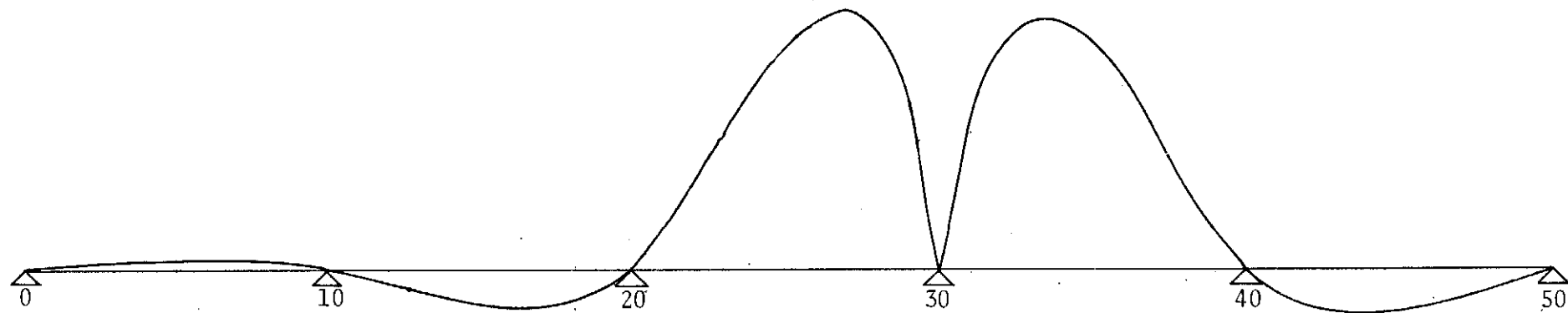


Figura IV.57 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 30

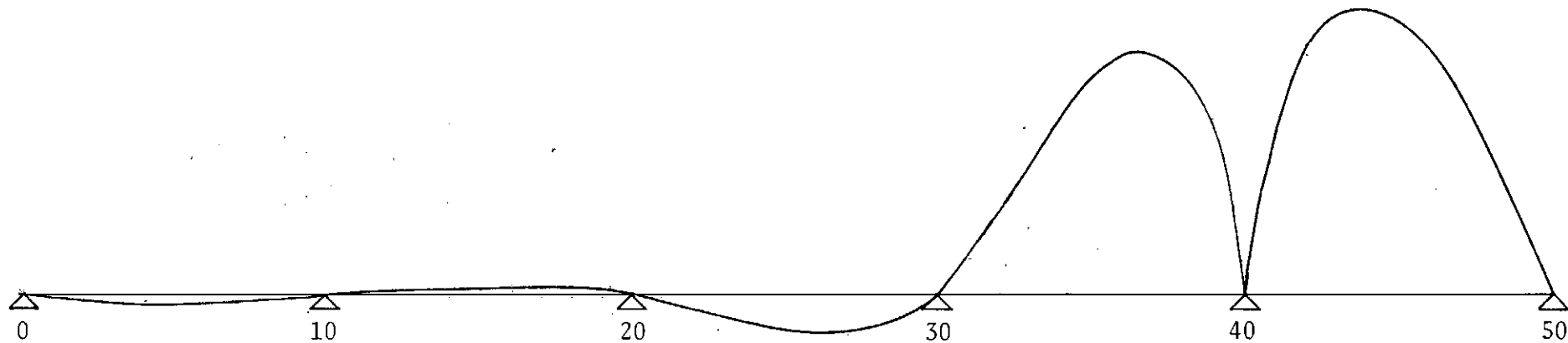


Figura IV.58 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 40

IV.3 - Linhas de Influência das Seções Intermediárias

Conhecidas as ordenadas das linhas de influência dos hiperestáticos, a obtenção das linhas de influência de uma seção qualquer será feita a partir da equação:

$$B = B_0 + \sum_i B_i^S X_i$$

sendo

$B_0 \rightarrow$ bimomentos da haste simplesmente apoiada sujeita ao carregamento externo $T=1$ aplicado na seção em questão.

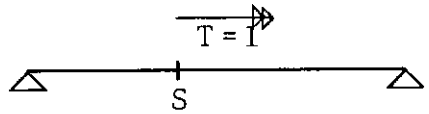


Figura IV.59

$B_i^S \rightarrow$ bimomento na seção em questão, da haste simplesmente apoiada sujeita ao hiperestático $X_i = 1$

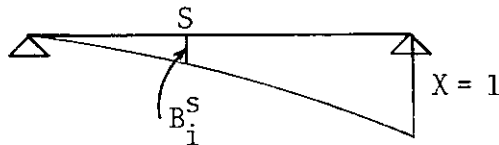



Figura IV.60

$X_i \rightarrow$ ordenadas da linha de influência do hiperestático.

IV.4 - Exemplo Numérico

Cálculo da Linha de Influência da Seção 5 do
perfil  6" x 2" x 23,1.

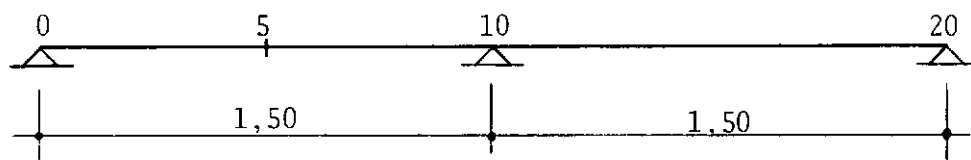


Figura IV.61

a) Determinação de B_0

A expressão de B_0 foi determinada no exemplo do item III-3:

$$B_0 = \frac{\text{sh}(4,96 x)}{204,79} \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 0,75$$

e

$$B_0 = \frac{\text{sh}(4,96 x)}{204,79} - \frac{\text{sh}(4,96 x_1)}{4,96} \quad \text{para} \quad 0,75 \leq x \leq 1,50$$

b) Determinação de B_{10}^5

A expressão de B_{10}^5 também foi determinada no exemplo citado anteriormente:

$$B_1 = \frac{\text{sh}(4,96 x)}{851,37}$$

$$\therefore B_{10}^5 = \frac{\text{sh}(4,96 x 0,75)}{851,37} = 0,0242$$

c) Determinação de X_{10}

A Linha de Influência do hiperestático X_{10} foi calculada no primeiro exemplo do item IV.2 (Veja Figura IV.34).

d) Determinação de B_5

$$B_5 = B_0 + B_{10}^5 X_{10}$$

$$B_5 = \frac{\text{sh}(4,96 x)}{204,79} - \frac{\text{sh}(4,96 x_1)}{4,96} + 0,0242 X_{10}$$

QUADRO DE VALORES

Seção	x	x_1	B_0	X_{10}	B_5
0	0	-	0	0	0
1	0,15	-	0,0040	-0,0115	0,0037
2	0,30	-	0,0073	-0,0230	0,0067
3	0,45	-	0,0225	-0,0343	0,0217
4	0,60	-	0,0478	-0,0453	0,0467
5	0,75	0	0,1007	-0,0554	0,0993
6	0,90	0,15	0,0478	-0,0640	0,0462
7	1,05	0,30	0,0225	-0,0691	0,0208
8	1,20	0,45	0,0073	-0,0669	0,0086
9	1,35	0,60	0,0040	-0,0495	0,0028
10	1,50	0,75	0	0	0
11	-	-	0	-0,0495	-0,0012
12	-	-	0	-0,0669	-0,0016
13	-	-	0	-0,0691	-0,0017
14	-	-	0	-0,0640	-0,0016
15	-	-	0	-0,0554	-0,0013
16	-	-	0	-0,0453	-0,0011
17	-	-	0	-0,0343	-0,0008
18	-	-	0	-0,0230	-0,0006
19	-	-	0	-0,0115	-0,0003
20	-	-	0	0	0

Quando $T = 1$ está na posição 5, o bimomento da seção 5 é igual a $+0,0993$ conforme havíamos encontrado no exemplo do item III.3 (veja Figura III.10).

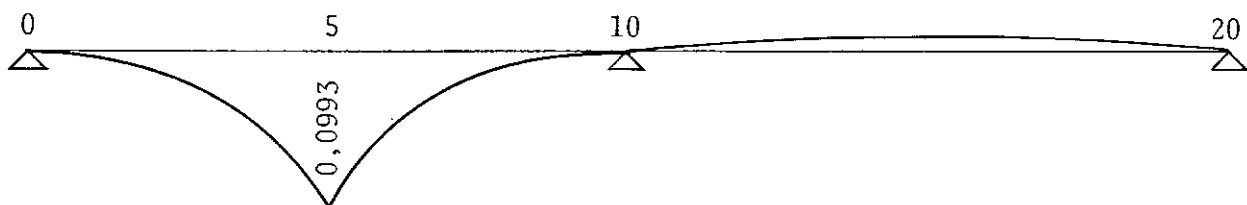


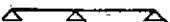



Figura IV.62 - Linha de Influência de Bimomento para a Seção 5

IV.5. - Observações Finais

- 1.^a) Os pontos máximos das Linhas de Influência dependem do perfil.

Observe-se o quadro comparativo onde são indicadas as seções correspondentes aos pontos máximos das Linhas de Influência traçadas para os perfis I 10" x 4 5/8" x 59,6 e I 20" x 7" x 148,9.

QUADRO COMPARATIVO DOS PONTOS MÁXIMOS DE BIMOMENTO

Tipo de vão	X_{10}		X_{20}		X_{30}		X_{40}	
	10"	20"	10"	20"	10"	20"	10"	20"
0 10 20 	7 e 13 Fig.IV-36	6 e 14 Fig.IV-49						
0 10 20 30 	7 e 13 Fig.IV-38	6 e 13 Fig.IV-50	17 e 23 Fig.IV-39	17 e 24 Fig.IV-51				
0 10 20 30 40 	7 e 13 Fig.IV-41	6 e 13 Fig.IV-52	17 e 23 Fig.IV-42	17 e 23 Fig.IV-53	27 e 33 Fig.IV-43	27 e 34 Fig.IV-54		
0 10 20 30 40 50 	7 e 13 Fig.IV-45	6 e 13 Fig.IV-55	17 e 23 Fig.IV-46	17 e 23 Fig.IV-56	27 e 33 Fig.IV-47	27 e 33 Fig.IV-57	37 e 43 Fig.IV-48	37 e 44 Fig.IV-58

2^a) Perfis com comprimento característico k aproximadamente nulo.

Conforme vimos no item II.6 , neste caso, a solução da equação diferencial se simplifica e ocorrerá uma analogia com a Teoria da Flexão. As Linhas de Influência para momentos fletores passam então a serem válidas para o bimomento.

Lembramos que infelizmente esta simplificação não ocorre para os perfis laminados cujo valor de k não é desprezível.

Para efeito de comparação foi traçada a Linha de Influência de momentos fletores da viga contínua com dois vãos iguais a 3,00 m. Foi utilizada a Tabela de Anger.

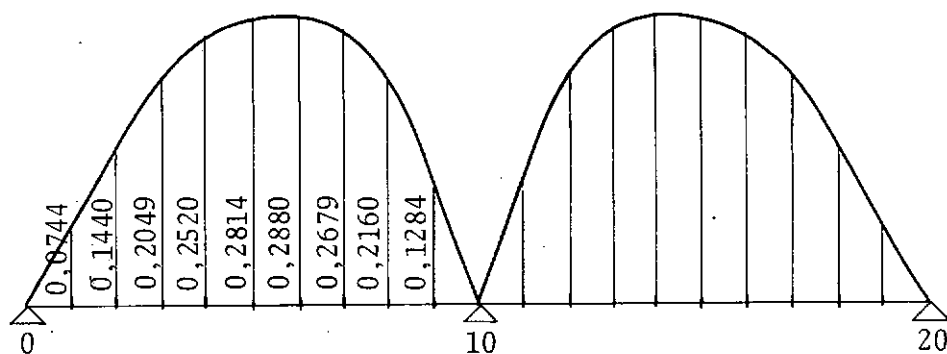


Figura IV.63

Comparando estes valores com os encontrados para as Figuras IV-36 (perfil I10) e IV-49 (perfil I20) observa-se uma variação de até 202% conforme atesta o Quadro a seguir:

Seção	Anger	I ₁₀	$\frac{\text{Anger}}{I_{10}}$	I ₂₀	$\frac{\text{Anger}}{I_{20}}$
0 = 20	0	0	-	0	-
1 = 19	-0,0744	-0,0246	3,02	-0,0494	1,51
2 = 18	-0,1440	-0,0507	2,84	-0,0970	1,48
3 = 17	-0,2049	-0,0730	2,81	-0,1407	1,46
4 = 16	-0,2520	-0,0960	2,63	-0,1781	1,41
5 = 15	-0,2814	-0,1172	2,40	-0,2063	1,36
6 = 14	-0,2880	-0,1346	2,14	-0,2209	1,30
7 = 13	-0,2679	-0,1442	1,86	-0,2166	1,24
8 = 12	-0,2160	-0,1382	1,56	-0,1858	1,16
9 = 11	-0,1284	-0,1009	1,27	-0,1182	1,09
10	0	0	-	0	-

Lembrando que os perfis I10" e I 20" apresentaram, respectivamente,

$$k = 2,34 \text{ m}^{-1} \quad \text{e} \quad 1,08 \text{ m}^{-1}$$

$$k\ell = 7,02 \quad \text{e} \quad 3,24$$

- Ambos deverão ser considerados como hastes de paredes delgadas ($k < 127 \text{ m}^{-1}$) de acordo com Zbirohowski-Kôscia;
- Segundo Kollbrunner e Basler, para o perfil I10" ($k\ell > 5$) a torção de Saint-Venant domina sendo que para o perfil I20" ($2 < k\ell < 5$) a torção é mista. Isto é, em nenhum dos casos existe preponderância da torção de empenamento, não se admi

tindo portanto, a simplificação da equação diferencial.

c) Para o perfil I10" as variações foram maiores (de 202% a 27%) que as do perfil I20" (de 51% a 9%). Portanto, quanto maior o valor de k mais se distanciam os valores da linha de Influência daqueles obtidos para a Flexão Simples.

3.^a) Para as vigas dotadas de balanços, o procedimento para a determinação das Linhas de Influência é o mesmo, bastando acrescentar o trecho correspondente ao balanço.

CAPÍTULO V

DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES

Determinação das Tensões num perfil \square 6" x 2" x x 23,1 kgf/m (0,231 KN/m) sujeito à ação do carregamento indicado na Figura V.1.

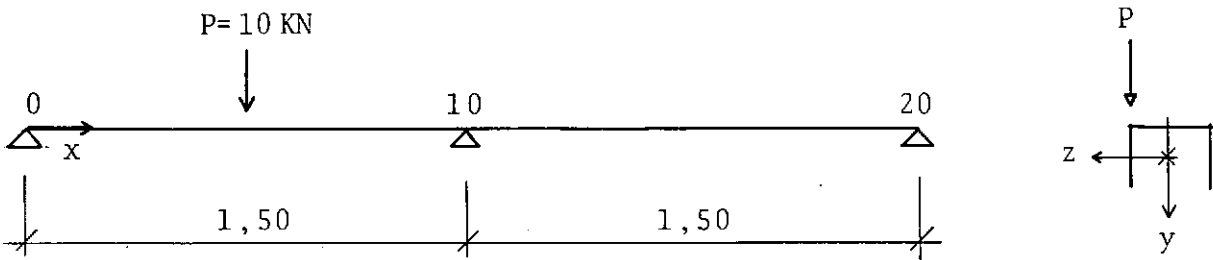


Figura V.1

a) Determinação das Tensões Normais

Determinaremos as tensões nos pontos indicados na Figura V.2

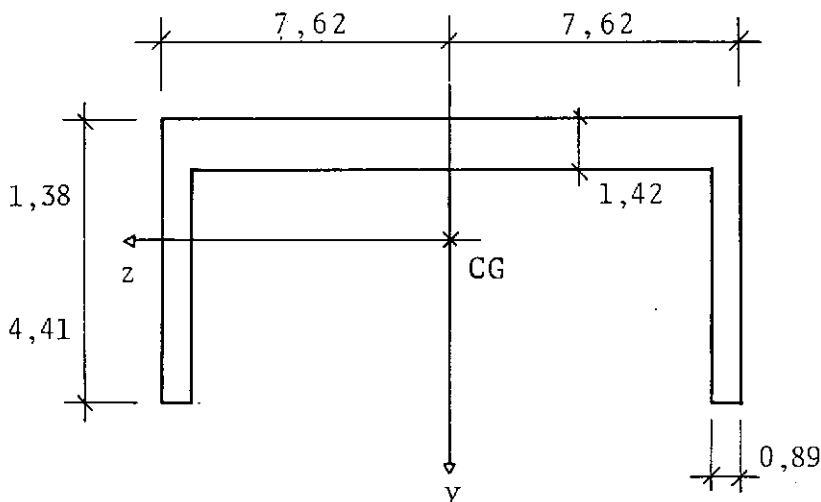


Figura V.2

O carregamento indicado provoca uma dupla solicitação no perfil:

- 1.^a) A carga P ocasiona a ação de momentos fletores paralelos ao eixo Z (além daqueles provocados pelo peso próprio);
- 2.^a) Esta carga P, pela posição em que está atuando (fora do centro de cisalhamento) ocasiona a ação de momento torçor na Seção 5 de valor igual a

$$T = P \times 7,17 \text{ cm} = 71,7 \text{ KNcm}$$

No exemplo em questão, as tensões normais serão provocadas pelos momentos fletores e pelos bimomentos.

Pelo princípio da superposição de efeitos, temos a expressão da tensão resultante:

$$\sigma_x = M_z \frac{y}{I_z} + B \frac{\omega}{I_\omega}$$

Do Capítulo I, item I.4 temos:

$$I_z = 52,4 \text{ cm}^4$$

$$I_\omega = 2288 \text{ cm}^6$$

Quadro das tensões devidas ao peso próprio (em KN/cm^2)

Seção	Ponto	A = C	B = D
	$Y \text{ (cm)}$ $M_z \text{ (cmKN)}$	+ 4,41	- 1,38
0 = 20	0	0	0
1 = 19	1,69	+0,14	-0,04
2 = 18	2,68	+0,24	-0,08
3 = 17	3,51	+0,30	-0,09
4 = 16	3,64	+0,31	-0,10
5 = 15	3,25	+0,27	-0,09
6 = 14	2,34	+0,20	-0,06
7 = 13	0,92	+0,08	-0,02
8 = 12	-1,03	-0,09	+0,03
9 = 11	-3,50	-0,29	+0,09
10	-6,50	-0,55	+0,17

No Capítulo I item I.4.3 calculamos os valores de ω e no Capítulo III item III.3 os valores de B para $T=1\text{mKN}$ que nos permitem elaborar o quadro seguinte:

Quadro das tensões devidas a carga vertical P (em KN/cm^2) (efeito de flexão)

Seção	Ponto	A = C	B = D
	y (cm) M_z (cmKN)	+4,41	-1,38
0	0	0	0
1	60,95	5,13	-1,61
2	121,89	10,26	-3,21
3	182,84	15,39	-4,82
4	243,78	20,52	-6,42
5	304,73	25,65	-8,03
6	215,67	18,15	-5,68
7	126,62	10,66	-3,33
8	37,56	3,16	-0,99
9	-51,50	-4,33	+1,36
10	-140,63	-11,84	+3,70
11	-126,63	-10,66	+3,33
12	-112,56	-9,47	+2,96
13	-98,49	-8,29	+2,59
14	-84,42	-7,10	+2,22
15	-70,35	-5,92	+1,85
16	-56,28	-4,74	+1,48
17	-42,21	-3,55	+1,11
18	-28,14	-2,37	+0,74
19	-14,07	-1,18	+0,37
20	0	0	0

OBSERVAÇÕES:

As tensões normais devidas ao Bimomento são desprezíveis para o exemplo em questão ($\sigma_B = \frac{1}{300} \sigma_{M_z}$). Como este exemplo foi elaborado em vistas à experimentação ter-se-ia de

colocar momentos torçores maiores para que aparecessem tensões normais significativas.

Quadro das tensões devidas aos Bimomentos (em KN/cm^2)

Seção	Ponto	A	B	C	D
	Y (cm) B (cm ² KN)				
		-26,05	+10,40	-10,40	+26,05
0	0	0	0	0	0
1	0,28	-0,00	+0,00	-0,00	+0,00
2	0,72	-0,01	+0,00	-0,00	+0,01
3	1,59	-0,02	+0,01	-0,01	+0,02
4	3,38	-0,04	+0,02	-0,02	+0,04
5	7,12	-0,08	+0,03	-0,03	+0,08
6	3,22	-0,04	+0,01	-0,01	+0,04
7	1,19	-0,01	+0,01	-0,01	+0,01
8	-0,16	+0,00	-0,00	+0,00	-0,00
9	-1,60	+0,02	-0,01	+0,01	-0,02
10	-3,97	+0,05	-0,02	+0,02	-0,05
11	-1,89	+0,02	-0,01	+0,01	-0,02
12	-0,90	+0,01	-0,00	+0,00	-0,01
13	-0,42	+0,00	-0,00	+0,00	-0,00
14	-0,20	+0,00	-0,00	+0,00	-0,00
15	-0,09	+0,00	0	0	-0,00
16	-0,04	0	0	0	0
17	-0,02	0	0	0	0
18	-0,01	0	0	0	0
19	-0,01	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0

b) Determinação das Tensões Tangenciais

As tensões tangenciais serão provocadas, pelo es

forço cortante e pela torção, sendo sua expressão resultante:

$$\tau = V_y \frac{S_z}{t_s I_z} \pm T_v \frac{t_s}{I_t} + T_\omega \frac{S_\omega}{t_s I_\omega}$$

Determinaremos as tensões nos pontos indicados na Figura V-4.

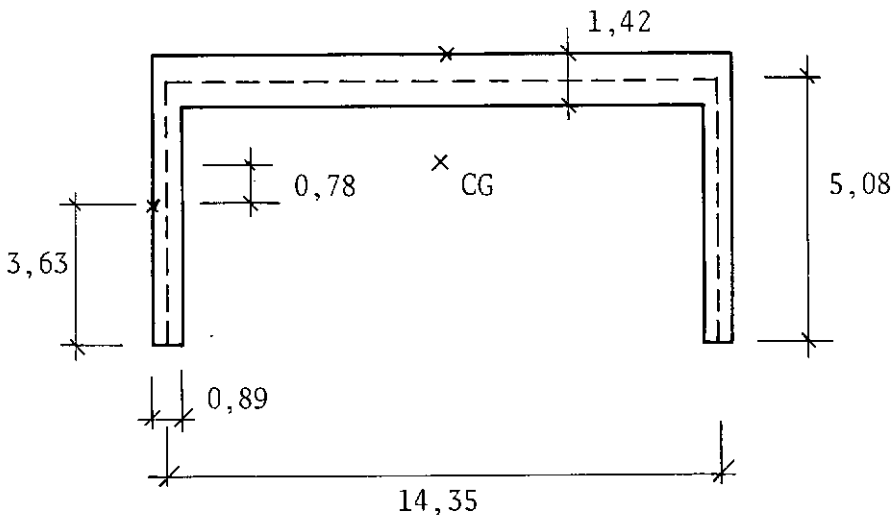


Figura V.3

Já sabemos que:

$$I_z = 52,4 \text{ cm}^4$$

$$I_\omega = 2288 \text{ cm}^6$$

O momento de inércia a torção terá para valor:

$$I_t = \sum_n S_n \frac{t_n^3}{3} = \frac{2 \times 5,08 \times 0,89^3}{3} + \frac{14,35 \times 1,42^3}{3} = 16,1 \text{ cm}^6$$

Determinemos o diagrama do Momento Estático S_z :

$$S_z^F = 0$$

$$S_z^E = 2 \times 0,89 \times 3,63 \left(\frac{3,63}{2} + 0,78 \right) = 16,77 \text{ cm}^3$$

As tensões devidas ao peso próprio terão para valores nas diferentes seções: (em KN/cm²)

Seção	Ponto	F	F
	$S_z \text{ (cm}^3\text{)}$	16,77	0
	$V_y \text{ (KN)} \quad t_s \text{ (cm)}$	$2 \times 0,89$	15,24
0 = 20	$\mp 0,13$	$\mp 0,02$	0
1 = 19	$\mp 0,10$	$\mp 0,02$	0
2 = 18	$\mp 0,06$	$\mp 0,01$	0
3 = 17	$\mp 0,03$	$\mp 0,01$	0
4 = 16	$\pm 0,01$	≈ 0	0
5 = 15	$\pm 0,04$	$\pm 0,01$	0
6 = 14	$\pm 0,08$	$\pm 0,01$	0
7 = 13	$\pm 0,11$	$\pm 0,02$	0
8 = 12	$\pm 0,15$	$\pm 0,03$	0
9 = 11	$\pm 0,18$	$\pm 0,03$	0
10 ^E = 10 ^D	$\pm 0,22$	$\pm 0,04$	0

Seção	Ponto	E	F
	$t_s(\text{cm})$ $T_v(\text{cmKN})$	0,89	1,42
0	- 31,27	- 1,73	- 2,76
1	- 30,77	- 1,70	- 2,71
2	- 29,00	- 1,60	- 2,56
3	- 24,91	- 1,38	- 2,20
4	- 16,14	- 0,89	- 1,42
5	+ 2,39	+ 0,13	+ 0,21
6	+ 20,64	+ 1,14	+ 1,82
7	+ 28,41	+ 1,57	+ 2,51
8	+ 30,20	+ 1,67	+ 2,66
9	+ 27,05	+ 1,50	+ 2,39
10	+ 17,15	+ 0,95	+ 1,51
11	+ 6,55	+ 0,36	+ 0,58
12	+ 1,71	+ 0,09	+ 0,15
13	- 0,58	- 0,03	- 0,05
14	- 1,67	- 0,09	- 0,15
15	- 2,19	- 0,12	- 0,19
16	- 2,43	- 0,13	- 0,21
17	- 2,55	- 0,14	- 0,22
18	- 3,60	- 0,14	- 0,23
19	- 2,60	- 0,14	- 0,23
20	- 2,60	- 0,14	- 0,23

Tensões devidas ao esforço cortante provocado pela carga P formando o seguinte quadro: (em KN/cm^2)

Seção	Ponto	F	F
	$S_z (\text{cm}^3)$	16,77	0
	$V_y (\text{KN})$ $t_s (\text{cm})$	2 x 0,89	15,24
0=1=2= =3=4=5 ^E	- 4,06	- 0,73	0
5 ^D =6=7= =8=9=10 ^E	+ 5,94	+ 1,07	0
10 ^D =11=12= =13=14=15= =16=17=18= =19=20	- 0,94	- 0,17	0

As tensões devidas à torção de Saint-Venant (que está calculada no Capítulo III item III.3 para $T = 1 \text{ mKN}$) terão para valores nas diferentes seções, os indicados no quadro a seguir:

As tensões devidas à torção de empenamento (que foi calculada no Capítulo III, item III.3) terão os valores indicados no quadro abaixo (em KN/cm²). Os valores de S_{ω} foram calculados no Capítulo I, item I.4.4.

Seção	Pontos	E	F
	S_{ω} (cm)	- 42,1	- 17,6
	T_{ω} (cmKN) / t_s (cm)	0,89	1,42
0	- 1,71	\mp 0,04	\pm 0,01
1	- 2,21	\mp 0,05	\pm 0,01
2	- 3,99	\mp 0,08	\pm 0,02
3	- 8,07	\mp 0,17	\pm 0,04
4	-16,84	\mp 0,35	\pm 0,09
5 ^E	-35,37	\mp 0,73	\pm 0,19
5 ^D	+36,33	\pm 0,75	\mp 0,20
6	+ 18,08	\pm 0,37	\mp 0,10
7	+ 10,31	\pm 0,21	\mp 0,06
8	+ 8,52	\pm 0,18	\mp 0,05
9	+ 11,67	\pm 0,24	\mp 0,06
10 ^E	+ 21,57	\pm 0,45	\mp 0,12
10 ^D	- 19,67	\mp 0,41	\pm 0,11
11	- 9,34	\mp 0,19	\pm 0,05
12	- 4,44	\mp 0,09	\pm 0,02
13	- 2,11	\mp 0,04	\pm 0,01
14	- 1,00	\mp 0,02	\pm 0,01
15	- 0,47	\mp 0,01	0,00
16	- 0,23	0,00	0,00
17	- 0,11	0,00	0,00
18	- 0,05	0,00	0,00
19	- 0,02	0,00	0,00
20	- 0,01	0,00	0,00

Somando os valores encontrados, obteremos as tensões tangenciais resultantes (em KN/cm^2)

Seção \ Ponto	E	F
0	-2,52	-2,77
1	-2,50	-2,72
2	-2,42	-2,58
3	-2,29	-2,24
4	-1,97	-1,51
5 ^E	-1,32	+0,40
5 ^D	+1,96	+0,41
6	+2,59	+1,92
7	+2,87	+2,57
8	+2,95	+2,71
9	+2,84	+2,45
10 ^E	+2,51	+1,63
10 ^D	+0,33	+1,62
11	-0,03	+0,63
12	-0,20	+0,17
13	-0,26	-0,06
14	-0,29	-0,16
15	-0,31	-0,19
16	-0,30	-0,21
17	-0,30	-0,22
18	-0,30	-0,23
19	-0,29	-0,23
20	-0,29	-0,23
.....

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Da exposição feita conclui-se que o Bimomento apresenta um comportamento hiperestático análogo ao das demais solicitações.

Para esse fim a Bibliografia existente, embora reduzida, já dispõe de elementos e de tabelas de ampla possibilidade de aplicação nos projetos correntes.

Em casos particulares como o que se analisou no Capítulo II em que a constante GI_t foi considerada desprezível em face de $E I_\omega$, ainda se torna viável a simplificação de cálculo tal como sugerida na obra de Vlasov. Conforme apresentamos no texto esta simplificação não foi exequível no exemplo em que tentamos o uso das tabelas de Anger.

O que se conclui é que a simplificação requer em cada caso uma avaliação prévia. Avaliação essa sempre recomendável pela possível simplificação nas tarefas de cálculo.

A orientação que demos ao cálculo das Linhas de Influência para a qual não havíamos encontrado encaminhamento idêntico é passível de estender-se a quadros e mesmo a peças curvas, assunto que propomos para estudos futuros, inclusive com preparação de programas computacionais específicos.

Concluimos então que o Bimomento pode ser consi
derado como uma sétima solicitação. Apresentamos para o seu es
tudo uma metodologia não muito divulgada, sendo que a redação
procurou ter uma seqüência capaz de ser utilizada pelos estu
diosos da matéria pela primeira vez.

APÊNDICE

Como as tabelas de Kollbrunner e Hajdin foram amplamente utilizadas, chamamos a atenção para alterações nas fôrmúlas da Tabela 3 nº 1, Tabela 1 nº 9 e Tabela 1 nº 5, alertando assim futuros usuários.

Dessas alterações damos comprovação na troca de correspondência mantida com os referidos autores.

INGRID ILG
 INGENIEURIN CIVIL

RUA HENRIQUE FLEISSER N.º 22
 VIJUCA - RIO DE JANEIRO - 22
 20521 - BRASILIEN

Rio de Janeiro, den 11. Januar 1982

Sehr geehrter Herr Prof. Kollbrunner,

Ich bin Hilfsassistentin bei Statiklehre in der Universität von Rio de Janeiro. Im moment entwickle ich eine Meisterschaft (Ph.d) these in Bauingenieurwesen - Statik mit der Hilfe von Prof. Sidney Martins Gomes dos Santos, einen Bekannten von Ihnen. Das Thema der these entspricht "Dünnwandige Stäbe unter Torsion - durchlaufender Träger".

Ich habe Ihren Bücher gelesen, besonders "Dünnwandige Stäbe mit geradliniger Achse - Band II". Über dieses Buch habe ich einige Fragen zu stellen die bei-liegend sind.

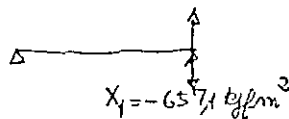
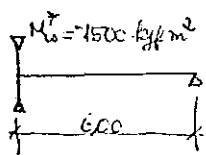
Ich werde ein Modell bauen in L Stahl um die berechnete und die gemessene Normalspannungen zu vergleichen. Wenn Sie neue Studien oder Untersuchungen über dünnwandige durchlaufende Träger haben, möchten Sie es mir bitte erkundigen.

Ich sende Ihnen viele Grüße von Prof. Sidney Santos und danke Ihnen herzlich

Luzil G

1°) Seite 160 - Abb. II. 61 C

$$T_w = T_{w0} + \sum T_{wi} X_i$$



$$T_{w0} = \left[\frac{k \cosh k l}{\sinh k l} \cosh k z - k \sinh k z \right] M_0^* \quad (\text{Tab 1, Nr. 9})$$

$$k = 0,00648 \text{ cm}^{-1}; \quad k l = 3,89; \quad \cosh k l = 24,417; \quad \sinh k l = 24,396$$

$$T_{w0} = -972,84 \cosh k z + 972,00 \sinh k z$$

$$X_1 T_{w1} = \left[k \frac{\cosh k z}{\sinh k l} \right] X_1 = -17,45 \cosh k z$$

z	T_{w0}	$X_1 T_{w1}$	$T_w = T_{w0} + X_1 T_{w1}$
0	-972,84	-17,45	-990,29
1,2	-448,22	-23,00	-471,22
2,4	-208,13	-43,18	-251,31
3,6	-98,64	-90,79	-189,43
4,8	-52,17	-196,13	-248,30
6,0	-40,84	-426,17	-467,01

$$T_s = T_{s0} + \sum T_{si} X_i$$

$$T_{s0} = \left[\frac{1}{l} - k \frac{\cosh k l}{\sinh k l} \cosh k z + k \sinh k z \right] M_0^* = -250,00 + 972,84 \cosh k z + 0,648 \sinh k z$$

$$X_1 T_{s1} = \left[\frac{1}{l} - k \frac{\cosh k z}{\sinh k l} \right] X_1 = -109,52 + 17,45 \cosh k z$$

z	T_{S0}	$X_1 T_{S1}$	T_S $T_{S0} + X_1 T_{S1}$	IN BUCH ABER STEHT	$T_S + T_w = T$
0	722,84	-92,06	630,78	+974	-359,51 \approx -360 OK
1,2	198,22	-86,51	111,71	+173	-359,51
2,4	-41,87	-66,34	-108,21	-168	-359,52
3,6	-151,36	-18,72	-170,08	-263	-359,51
4,8	-197,83	86,61	-111,22	-173	-359,52
6,0	-209,16	316,65	+107,49	+169	-359,52

Für die anderen Punkten fand ich:

z	T_w	T_S	T_S IN BUCH	$T = T_S + T_w$
0	+728,26	+106,36	+169	+834,62 \approx +834 OK
1,6	+250,36	+264,26	+422	+514,62
3,2	+67,48	+127,13	+199	+194,61
4,8	-36,96	-88,45	-139	-125,41
6,4	-183,87	-261,60	-446	-445,47
8,0	-547,54	-218,11	-342	-765,65 \approx -766 OK
0	+239,73	-219,01	-342	+20,72 \approx 21 OK
1,2	+104,62	-83,91	-131	+20,71
2,4	+35,93	-15,21	-42	+20,72
3,6	-10,35	+31,07	+22	+20,72
4,8	-63,13	+83,85	+129	+20,72
6,0	-154,07	+174,79	+277	+20,72
0	+221,26	+178,74	+277	+400,00 OK
0,75	+164,10	+235,90	+372	+400,00
1,50	+146,68	+253,32	+397	+400,00

2°) Tabelle 3, Nr. 1 - Seite 177

Im Buch steht:

$$E T_{ww} S = \frac{1}{R^3} \int T_s \bar{T}_s dz + \int M_w \bar{M}_w dz = \chi_a^1 T^* \bar{M}_w^* l$$

dann wurde man finden für:

$$[E T_{ww} S] = [F L^2, L^6, FL] = [F^0 L^5]$$

und für:

$$[\chi_a^1 T^* \bar{M}_w^* l] = [FL, FL^2, L] = [F^2 L^4] ?$$

deswegen frage ich ob das richtig wäre:

$$E T_{ww} S = \chi_a^1 T^* \bar{M}_w^* l^2$$

3°) Tabelle 1, Nr. 9 - Seite 124

Im Buch steht:

$$T_w = k \frac{\cosh k S}{\sinh k l} \Big| - k \sinh k z_1$$

ich frage ob das richtig wäre:

$$T_w = k \frac{\cosh k S}{\sinh k l} \cosh k z \Big| - k \sinh k z_1$$

$$\text{damit } T_s + T_w = \frac{1}{l}$$

4°) Tabelle 1, Nr. 5

Im Buch steht:

$$T_s = -M_{w0} \cdot k \sinh k z + T_0 \left(1 - \frac{1}{l} \cosh k z\right) \Big| - 1 + \frac{1}{l} \cosh k z_1$$

← bis hier findet man annähernde Werte

→ hier findet man zu große Werte!

für T_w und M_w kommt dasselbe vor!

DR. SC. TECHN. DR. SC. TECHN. H.C.
CURT F. KOLLBRUNNER
 DIPL. BAU-INGENIEUR E.T.H. ING.-CONSEIL

8702 ZOLLIKON/ZH
 Wietlibergstr. 50,
 Postfachkonto Zürich 80-33 205

24.1.1982

Flugpost

Fräulein
 Ingrid Ilg
 Rua Henrique Fleiuss Nr. 22
 Tijuca
 Rio de Janeiro
 20521 Brasilien

Sehr geehrtes Fräulein Ilg,

Ihren Brief vom 11.1.1982 habe ich Herrn Professor Hajdin in
 Beograd zur Beantwortung zugestellt. Er wird Ihnen direkt
 schreiben.

Mit freundlichen Grüßen

C. F. Kollbrunner

Dr. C. F. Kollbrunner

Kopie z.K. und Beantwortung an :
 Herrn Prof. Dr. N. Hajdin
 Tetovska 72, YU - 11000 Beograd
 Jugoslawien

Mit der Bitte um direkte Beantwortung. Eine Kopie Ihres Briefes bitte an mich.

Mit freundlichen Grüßen

C. F. Kollbrunner

Dr. C. F. Kollbrunner

Dr. sc. techn. Nikola HAJDIN, Dipl. Bau.-Ing.
 o. Professor an der Fakultät für Bauingenieurwesen
 der Universität Beograd.
 o. Mitglied der Serbischen Akademie der Wissenschaften und Künste

YU-11000 BEOGRAD,
~~XXXXXXXXXX~~ Tetovska 72
 Jugoslawien

12.4.1982.

Fraulein

Frau Ingrid Ilg

Rua Henrique Fleivs No 22

Tijuca

RIO DE JANEIRO

20521 - BRASIL

Sehr geehrtes Fräulein Ilg,

Besten Dank für Ihren Brief an Herrn Dr. Kollbrunner.

Betreffend Ihre Fragen im Zusammenhang mit dem Buch "Dunnwandige Stäbe", teile ich Ihnen das folgende mit:

1° Seite 160:

Sie haben recht. Bei der Berechnung des Momentes T_s , wurde der Ausdrück

$$T_s = \frac{1}{l} - k \frac{\cosh ks}{\sinh kl} \cosh kz + k \sinh z$$

irrtümlicherweise mit $\frac{1}{k}$ multipliziert

Ihre Werte (d.h. korrekte Werte) bekommt man wenn man im Buch stehende Grösse mit $k = 0,648 \text{ m}^{-1}$ multipliziert.


2° Druckfehler im Buch, (das haben wir nach der Erscheinung des Buches bemerkt). - Sie haben recht.

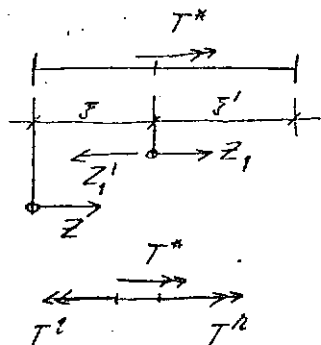
3° Dasselbe, fehlt coshkz

4° Tabelle 1, no 5, die Formel im Buch ist korrekt (beiliegend Ableitung und Beispiel)

Ich glaube dass Ich Sie damit bedient habe. Ich würde mich sehr freuen wenn Sie mir an oben stehende Adresse ein Exemplar der Dissertation senden möchten.

Beste Grüsse Ihnen und Herrn Professor Sidney Martins Gomer dos Santos, obwohl ich ihn nicht persönlich kenne.


 N. Hajdin



$$\underline{z - z' = z_1}$$

$$\varphi^R = \varphi^L$$

$$\varphi'^R = \varphi'^L$$

$$M_\omega^R = M_\omega^L$$

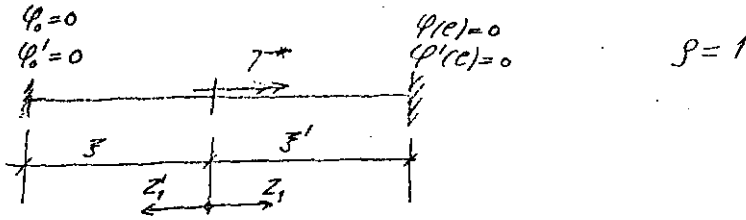
$$T^R = T^L - T^*$$

$$GK\varphi = M_\omega (1 - \cosh \kappa z) + T_0 \left(z - \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa z \right) \Big| - T^* \left[z - z' - \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa (z - z') \right] \\ (z_1 - \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa z_1)$$

$$TS = -M_\omega \kappa \sinh \kappa z + T_0 (1 - \cosh \kappa z) \Big| - T^* (1 - \cosh \kappa z_1)$$

$$M_\omega = M_\omega \cosh \kappa z + T_0 \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa z \Big| - T^* \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa z_1$$

$$T_0 = M_\omega \kappa \sinh \kappa z + T_0 \cosh \kappa z \Big| - \cosh \kappa z_1$$



$$\frac{Hw_0}{GK} (1 - \cosh \kappa l) + \frac{T_0}{GK} (l - \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa l) - \frac{T^*}{GK} [l - \xi - \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa (l - \xi)] = 0 \quad (1)$$

$$-\kappa \frac{Hw_0}{GK} \sinh \kappa l + \frac{T_0}{GK} (1 - \cosh \kappa l) - \frac{T^*}{GK} [1 - \cosh \kappa (l - \xi)] = 0 \quad (2)$$

(2) \Rightarrow

$$T_0 (1 - \cosh \kappa l) = \kappa Hw_0 \sinh \kappa l + T^* (1 - \cosh \kappa \xi')$$

$$T_0 = \frac{1}{1 - \cosh \kappa l} [\kappa Hw_0 \sinh \kappa l + T^* (1 - \cosh \kappa \xi')] \quad (a)$$

$$Hw_0 (1 - \cosh \kappa l) + \frac{l - \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa l}{1 - \cosh \kappa l} [\kappa Hw_0 \sinh \kappa l + T^* (1 - \cosh \kappa \xi')]$$

$$- T^* (\xi' - \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa \xi') = 0$$

$$Hw_0 \left[(1 - \cosh \kappa l) + \frac{l - \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa l}{1 - \cosh \kappa l} \kappa \sinh \kappa l \right] = T^* \left[\left(\xi' - \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa \xi' \right) - \frac{l - \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa l}{1 - \cosh \kappa l} (1 - \cosh \kappa \xi') \right]$$

J_1 J_2

$$J_1 = \frac{(1 - \cosh \kappa l)^2 + \kappa l \sinh \kappa l - \sinh^2 \kappa l}{1 - \cosh \kappa l} = \frac{1 - 2 \cosh \kappa l + \cosh^2 \kappa l + \kappa l \sinh \kappa l - \sinh^2 \kappa l}{1 - \cosh \kappa l}$$

$$= \frac{2(1 - \cosh \kappa l) + \kappa l \sinh \kappa l}{1 - \cosh \kappa l} \quad (\cosh^2 \kappa l - \sinh^2 \kappa l = 1)$$

$$J_2 = \frac{(5' - \frac{1}{k} sh \kappa 5')(1 - ch \kappa l) - (l - \frac{1}{k} sh \kappa l)(1 - ch \kappa 5')}{1 - ch \kappa l}$$

$$Mw_0 J_1 = T^* J_2$$

$$\left[Mw_0 = T^* \frac{J_2}{J_1} = \frac{(5' - \frac{1}{k} sh \kappa 5')(1 - ch \kappa l) - (l - \frac{1}{k} sh \kappa l)(1 - ch \kappa 5')}{2(1 - ch \kappa l) + \kappa l sh \kappa l} \right]$$

$$(T^* = 1)$$

(a) \Rightarrow

$$T_0 = \kappa \frac{Mw_0}{1 - ch \kappa l} sh \kappa l + \frac{1 - ch \kappa 5'}{1 - ch \kappa l}$$

$$T_0 = \frac{\kappa}{1 - ch \kappa l} sh \kappa l \frac{(5' - \frac{1}{k} sh \kappa 5')(1 - ch \kappa l) - (1 - ch \kappa 5')(l - \frac{1}{k} sh \kappa l)}{2(1 - ch \kappa l) + \kappa l sh \kappa l}$$

$$+ \frac{1 - ch \kappa 5'}{1 - ch \kappa l}$$

$$T_0 = \left(\frac{\kappa sh \kappa l (5' - \frac{1}{k} sh \kappa 5')(1 - ch \kappa l) - \kappa sh \kappa l (1 - ch \kappa 5')(l - \frac{1}{k} sh \kappa l)}{2(1 - ch \kappa l) + \kappa l sh \kappa l} + \frac{2(1 - ch \kappa 5')(1 - ch \kappa l) + \kappa l sh \kappa l (1 - ch \kappa 5')}{2(1 - ch \kappa l) + \kappa l sh \kappa l} \right) \frac{1}{1 - ch \kappa l}$$

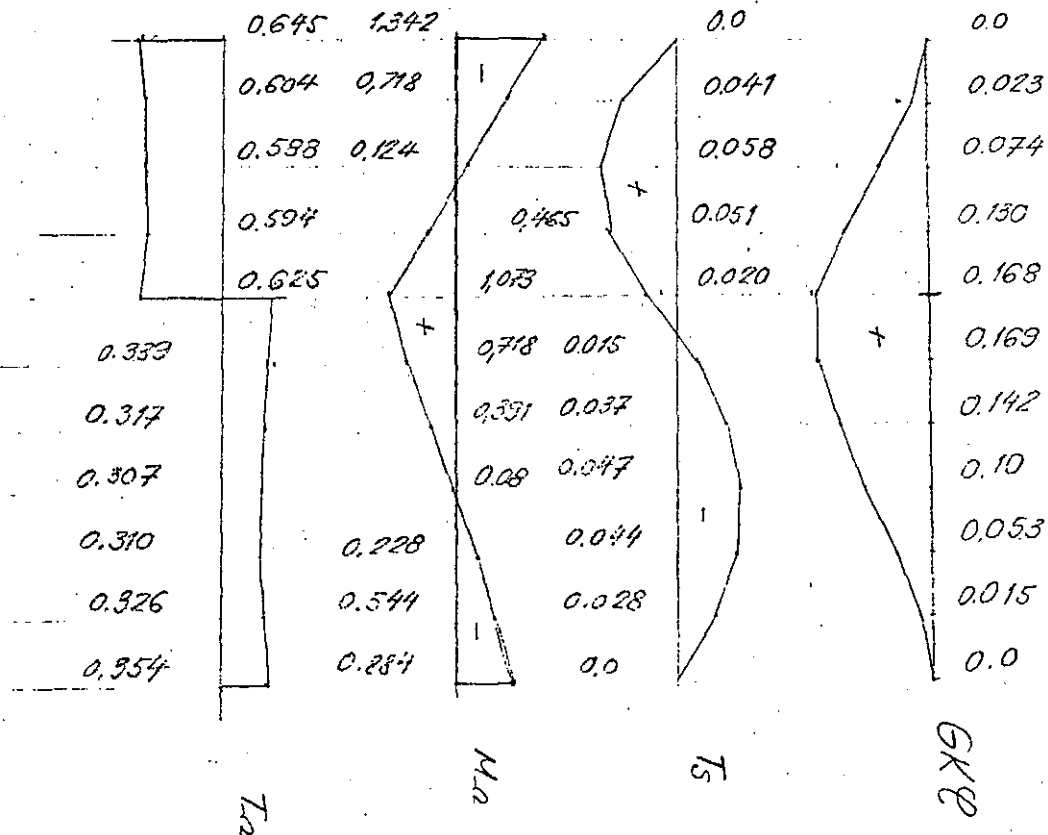
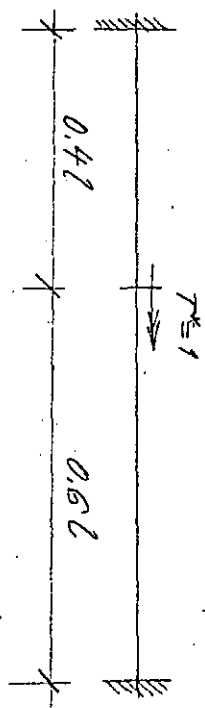
$$J_3 = \kappa sh \kappa l (5' - \frac{1}{k} sh \kappa 5')(1 - ch \kappa l) - \kappa sh \kappa l (1 - ch \kappa 5')(l - \frac{1}{k} sh \kappa l) + 2(1 - ch \kappa 5')(1 - ch \kappa l) + \kappa l sh \kappa l (1 - ch \kappa 5')$$

$$J_3 = \kappa sh \kappa l (5' - \frac{1}{k} sh \kappa 5')(1 - ch \kappa l) + 5^2 h \kappa l (1 - ch \kappa 5') + 2(1 - ch \kappa 5')(1 - ch \kappa l)$$

$$J_3 = \kappa sh \kappa l (5' - \frac{1}{k} sh \kappa 5')(1 - ch \kappa l) + (1 - ch \kappa 5') (5^2 h \kappa l + 2 - 2 ch \kappa l) = (1 - ch \kappa l)^2$$

$$T_0 = \frac{J_3}{2(1 - ch \kappa l) + \kappa l sh \kappa l} \frac{1}{(1 - ch \kappa l)}$$

$$\left[T_0 = \frac{\kappa sh \kappa l (5' - \frac{1}{k} sh \kappa 5') + (1 - ch \kappa 5')(1 - ch \kappa l)}{2(1 - ch \kappa l) + \kappa l sh \kappa l} \right]$$



TRADUÇÃO DA CARTA DA PÁG. 206

Rio de Janeiro, 11 de janeiro de 1983

Caro Prof. Kollbrunner,

Sou Prof.^a Assistente no Departamento de Estruturas na Universidade Federal do Rio de Janeiro. Presentemente desenvolvo uma tese de mestrado na área de Engenharia Civil - Estruturas sob a orientação do Prof. Sydney Martins Gomes dos Santos, seu conhecido. O tema da tese refere-se a "Hastes de Paredes Delgadas sob Torção - Vigas Contínuas". Li seus livros, em especial "Dünnwandige Stäbe mit Geradliniger Achse - Band I" (Hastes de Paredes Delgadas com eixo reto - 1º vol). A respeito desse livro tenho algumas perguntas que estão formuladas em anexo.

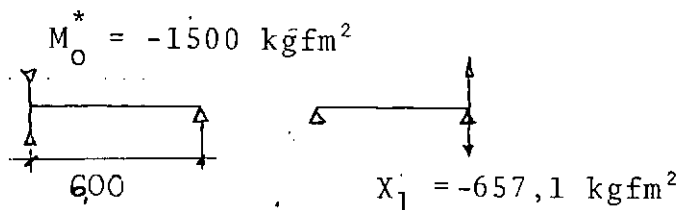
Pretendo construir um modelo reduzido em perfil com o objetivo de verificar as tensões normais calculadas. Caso o Sr. tenha conhecimento de novos estudos ou pesquisas sobre hastes de paredes delgadas, gostaria de ser informada.

Envio recomendações do Prof. Sydney Santos e agradeço calorosamente.

ASS. Ingrid Ilg

1º) Pag. 160 - Item II.61C

$$T_{\omega} = T_{\omega 0} + \sum T_{\omega i} X_i$$



$$T_{\omega 0} = \left[k \frac{\cosh k\ell}{\sinh k\ell} \cdot \cosh kz - k \sinh kz \right] M_{\omega}^* \quad (\text{Tab. 1, N}^\circ 9)$$

$$k = 0,00648 \text{ cm}^{-1}; \quad k\ell = 3,89; \quad \cosh k\ell = 24,417; \quad \sinh k\ell = 24,396$$

$$T_{\omega 0} = -972,84 \cosh kz + 972,00 \sinh kz$$

$$X_i T_{\omega i} = \left[k \frac{\cosh kz}{\sinh k\ell} \right] X_1 = -17,45 \cosh kz$$

T_{ω}			
z	$T_{\omega 0}$	$X_1 T_{\omega 1}$	$T_{\omega 0} + X_1 T_{\omega 1}$
0	-972,84	-17,45	-990,29
1,2	-448,22	-23,00	-471,22
2,4	-208,13	-43,18	-251,31
3,6	-98,64	-90,79	-189,43
4,8	-52,17	-196,13	-248,30
6,0	-40,84	-426,17	-467,01

$$T_s = T_{s0} + \sum T_{s_i} X_i$$

$$T_{s0} = \left[\frac{1}{\ell} - k \frac{\cosh k\ell}{\sinh k\ell} \cosh kz + k \sinh kz \right] M_{\omega}^* = -250,00 + 972,84 \cosh kz + 0,648 \sinh kz$$

$$X_1 T_{s1} = \left[\frac{1}{\ell} - k \frac{\cosh kz}{\sinh k\ell} \right] X_1 = -109,52 + 17,45 \cosh kz$$

Z	T_{s0}	$X_1 T_{s1}$	$T_{s0} + X_1 T_{s1}$	No livro porém constam	$T_s + T_\omega = T$
0	722,84	-92,06	630,78	+974	-359,51 \approx -360 OK
1,2	198,22	-86,51	111,71	+173	-359,51
2,4	-41,87	-66,34	-108,21	-168	-359,52
3,6	-151,36	-18,72	-170,08	-263	-359,51
4,8	-197,83	86,61	-111,22	-173	-359,52
6,0	-209,16	316,65	+107,49	+169	-359,52

Para as outras seções achamos:

Z	T_ω	T_s	T_s no livro	$T = T_s + T_\omega$
0	+728,26	+106,36	+169	+ 834,62 \approx +834 OK
1,6	+250,36	+264,26	+422	+514,62
3,2	+67,48	+127,13	+199	+194,61
4,8	-36,96	-88,45	-139	-125,41
6,4	-183,87	-261,60	-416	-445,47
8,0	-547,54	-218,11	-342	-765,65 \approx -766 OK
0	+239,73	-219,01	-342	+20,72 \approx 21 OK
1,2	+104,62	-83,91	-131	+20,71
2,4	+35,93	-15,21	-42	+20,72
3,6	-10,35	+31,07	+22	+20,72
4,8	-63,13	+83,84	+129	+20,72
6,0	-154,07	+174,79	+277	+20,72
0	+221,26	+178,74	+277	+400,00 OK
0,75	+164,10	+235,90	+372	+400,00
1,50	+146,68	+253,32	+397	+400,00

2º) Tabela 3, Nº 1, Pág. 177

No livro consta:

$$E J_{\omega\omega} \delta = \frac{1}{k^2} \int T_S \bar{T}_S dz + \int M_{\omega} \bar{M}_{\omega} dz = x'_a T^* \bar{M}_{\omega}^* \ell$$

Neste caso acharíamos para:

$$\left| E J_{\omega\omega} \delta \right| = \left| FL^{-2} \cdot L^6 \cdot FL \right| = \left| F^2 L^5 \right|$$

e para:

$$\left| x'_a T^* \bar{M}_{\omega}^* \ell \right| = \left| FL \cdot FL^2 \cdot L \right| = \left| F^2 L^4 \right| ?$$

porisso pergunto se o correto não seria:

$$E J_{\omega\omega} \delta = x'_a T^* \bar{M}_{\omega}^* \ell^2$$

3º) Tabela 1, Nº 9 - Pág. 124

No livro consta:

$$T_{\omega} = k \frac{\cosh k\zeta'}{\sinh k\ell} \Big| - k \sinh kz_1$$

pergunto se o correto não seria:

$$T_{\omega} = k \frac{\cosh k\zeta'}{\sinh k\ell} \cosh kz \Big| - k \sinh kz_1$$

a fim de que

$$T_S + T_{\omega} = \frac{1}{\ell}$$

TRADUÇÃO DA CARTA DA PÁG. 210

24.1.1982

Cara Srta. Ilg

Enviei sua carta de 11.1.1982 ao Sr. Prof. Hajdin em Belgrado para ser respondida. Ele escrever-lhe-á diretamente.

Saudações amigáveis

ASS. Dr. C. F. Kollbrunner

Cópia a K. e resposta ao:

Sr. Prof. Dr. N. Hajdin
Tetovska 72, YU - 11000 Belgrado
Iugoslávia

Com o pedido de uma resposta direta. Peço uma cópia de sua carta.

Saudações amigáveis

ASS. Dr. C. F. Kollbrunner

TRADUÇÃO DA CARTA DA PÁG. 211

12.4.1982

Cara Srta. Ilg

Agradeço sua carta ao Sr. Dr. Kollbrunner.

Com respeito a suas perguntas relacionadas ao livro "Dunnwandige Stable" (Hastes de Paredes Delgadas) tenho a informar:

1º) Pág. 160:

A sra. tem razão. No cálculo do momento T_s a expressão $T_s = \frac{1}{\ell} - k \frac{\cosh ks}{\sinh k\ell} \cosh kz + k \sinh kz$, foi erradamente multiplicada por $\frac{1}{k}$.

Seus valores (isto é, valores corretos) são encontrados quando se multiplicam as grandezas apresentadas no livro por $k = 0,648 \text{ m}^{-1}$.

2º) Erro de impressão no livro (o que percebemos após o lançamento do livro). A Sra. tem razão.

3º) Idem, falta $\cosh kz$.

4º) Tabela 1, nº 5, a Fórmula no livro está correta. (em anexo esclarecimento e exemplo).

Acredito que com isso pude satisfazê-la. Ficaria muito agradecido se a Sra. me enviasse ao endereço acima um exemplar de seu trabalho.

Recomendações a Sra. e ao Sr. Prof. Sydney Martins Gomes dos Santos, embora não o conheça pessoalmente.

BIBLIOGRAFIA

- | ¹ | ZBIROHOWSKI-KOSCIA, K. - "Thin Walled Beams" - Crosby
Lockwood & Son Ltd. - 1967.
- | ² | VLASSOV, B. Z. - "Pièces Longues en Voiles Minces" - Edi-
tions Eyrolles - 1962.
- | ³ | KHAN, A. H.; TOTTENHAM, H. - "The Method of Bimoment Dis-
tribution for the Analysis of Continuous Thin-walled
Structures Subject to Torsion" - Proceedings Institute
of Civil Engineers, December, 1977.
- | ⁴ | MEGSON, T. H. - "Linear Analysis of Thin Walled Elastic
Structures" - Surrey University Press.
- | ⁵ | KOLLBRUNNER, C. F.; HAJDIN, N. - "Dünnwandige Stäbe mit
Geradliniger Achse - Band I" - Springer Verlag - 1972.
- | ⁶ | KOLLBRUNNER, C. F.; BASLER - "Torsion in Structures"
Springer Verlag - 1969.
- | ⁷ | LANGENDONCK, T, V. - "Resistência dos Materiais - Defor-
mações II" - Editora Edgard Blücher Ltda.
- | ⁸ | TIMOSHENKO - "Resistência dos Materiais" - Vol. 1 e 2 -
Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. - 1979.

- [⁹] ROARK, R. J.; YOUNG, W. C. - "Formulas for Stress and Strain" - McGraw Hill Kogabusha Ltd. - Vth Edition.
- [¹⁰] PFEIL, W. - "Estruturas de Aço" - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. - 1977.
- [¹¹] DOS SANTOS, S. M. G. - "Estudo das Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta" - PUC - 1967.
- [¹²] POLLILLO, A. - "Dimensionamento de Concreto Armado" - Vol. 3 - Editora Científica - 1980.